Рене Генон

Принципы исчисления бесконечно малых

Перевод с французского

Минский корпус Рене Генона
guenon.ru
2026

Оригинал: René Guénon. Les Principes du calcul infinitésimal (год издания: 1946).

Редакция перевода от 06.10.2026.

Текст на сайте с параллельным французским оригиналом:
https://guenon.ru/1946_PCI.html

Электронное издание. Минский корпус Рене Генона
Файл сформирован 13.10.2026.

Содержание

Предисловие 5
Глава I. Бесконечное и неопределённое 13
Глава II. Противоречие «бесконечного числа» 25
Глава III. Неисчислимое множество 31
Глава IV. Измерение непрерывного 39
Глава V. Вопросы, которые вызывает метод исчисления бесконечно малых 47
Глава VI. «Обоснованные фикции» 53
Глава VII. «Степени бесконечности» 61
Глава VIII. «Деление до бесконечности» или неопределённая делимость. 69
Глава IX. Неопределенно возрастающее и неопределённо уменьшающееся 79
Глава X. Бесконечное и непрерывное. 87
Глава XI. «Закон непрерывности» 93
Глава XII. Понятие предела 99
Глава XIII. Непрерывность и переход к пределу 105
Глава XIV. «Исчезающие величины» 111
Глава XV. Нуль — это не число. 117
Глава XVI. Обозначение отрицательных чисел. 125
Глава XVII. Изображение равновесия сил 133
Глава XVIII. Переменные и постоянные величины 139
Глава XIX. Последовательные дифференцирования 143
Глава XX. Различные порядки неопределённости. 147
Глава XXI. Неопределённое является аналитически неисчерпаемым. 155
Глава XXII. Синтетический характер интегрирования . 159
Глава XXIII. Аргументы Зенона элейского 165
Глава XXIV. Истинная концепция перехода к пределу. . 171

Глава XXV. Заключение 175

Предисловие

Хотя настоящее исследование может показаться, по крайней мере на первый взгляд, лишь в незначительной степени имеющим «специальный» характер, нам представлялось полезным предпринять его, чтобы уточнить и более полно объяснить некоторые понятия, к которым нам по различным поводам приходилось обращаться, когда мы использовали математический символизм, и этого довода в конечном счёте достаточно, чтобы это исследование оправдать и чтобы более на этом не останавливаться. Тем не менее, мы должны сказать, что к этому могут быть добавлены ещё и иные второстепенные причины, касающиеся главным образом того, что можно называть «исторической» стороной вопроса; она и на самом деле не лишена, с нашей точки зрения, интереса в том смысле, что все дискуссии, возникающие по поводу природы и ценности исчисления бесконечно малых, представляют собой поразительный пример того отсутствия принципов, которое характеризует профанные науки, то есть те единственные науки, которые наши современники знают и которые они считают возможными. Мы уже нередко отмечали, что большинство этих наук, даже в той мере, в какой они ещё соответствуют некоторой реальности, не представляют собой ничего, кроме простых выродившихся останков некоторых из древних традиционных наук; когда они перестали поддерживать связь с принципами и утратили тем самым своё истинное изначальное значение, их низшая сторона в конце концов обрела независимое развитие и стала рассматриваться как достаточное само по себе знание, хотя, по сути дела, его собственная ценность как знания как раз и оказывается доведенной почти до полной ничтожности. Главным образом это проявляется, когда

речь идёт о физических науках, но, как мы уже объясняли в ином месте[1], и сама современная математика не представляет собой в этом отношении исключения, если сравнить её с тем, чем была для древних наука чисел и геометрия; когда мы здесь говорим о древних, то следует под этим понимать «классическую» древность, так как самого незначительного изучения пифагорейских теорий и теорий платонизма достаточно, чтобы это доказать, или по крайней мере должно быть достаточно, если не принимать в расчёт необычайную непонятливость тех, кто стремится сегодня эти науки интерпретировать; если бы эта непонятливость не была столь законченной, то как можно было бы поддерживать, например, мнение об «эмпирическом» происхождении тех наук, о которых идёт речь, тогда как на самом деле они, наоборот, оказываются тем более далёкими от всякого «эмпиризма», чем в более глубокую древность мы погружаемся, и так же, между прочим, обстоит дело с любой отраслью научного познания?

Математики в современную эпоху дошли, кажется, до того, что уже не знают, чем на самом деле является число; мы не слышим, чтобы они говорили не только о числе, взятом в символическом и аналогическом смысле, как его понимали пифагорейцы и каббалисты, что в целом вполне объяснимо, но мы, что может показаться более странным и даже парадоксальным, не слышим даже и того, что они говорят о числе в его простом количественном значении. На самом деле они любую науку сводят к калькуляции, которая для них представляет собой простую совокупность более или менее поверхностных процедур, что в конечном счёте означает, что они заменяют число цифрой; кроме того, это смешение числа с цифрой настолько в наши дни распространено, что его в любое мгновение можно обнаружить

[1] См.: «Царство количества и знамения времени». М., 1994.

даже в выражениях разговорного языка[2]. Но цифра, собственно говоря, — это не более чем оболочка числа; мы даже не говорим, что это его тело, так как, скорее, геометрическая форма может в некоторых отношениях правомерно рассматриваться как истинное тело числа, как это доказывают теории древних о многоугольниках и многогранниках, имевшие прямую связь с символизмом чисел; и это, между прочим, согласуется с тем фактом, что любое «воплощение» неизбежно подразумевает «перенесение в пространство». Мы тем не менее не желаем сказать, что сами цифры являются полностью произвольными знаками, форма которых определялась бы лишь фантазией одного или нескольких индивидов; они должны быть числовыми знаками, а также знаками алфавита, от которых они, впрочем, в некоторых языках[3] не отличаются, и можно как к первым, так и ко вторым применить понятие иероглифического, то есть идеографического или символического происхождения, которое подходит для всех письменностей без исключения, каким бы туманным ни могло быть в некоторых случаях их происхождение в силу более или менее поздних искажений и изменений.

В чём можно быть уверенным, так это в том, что математики в своем обозначении используют символы, смысла ко-

---

[2] Есть даже «псевдоэзотерики», которые столь мало знают о том, о чём желают говорить, что они никогда не упускают случая допустить это самое смешение в тех фантастических разглагольствованиях, которыми они стремятся заменить традиционную науку чисел!

[3] Такими были древнееврейский и древнегреческий языки, а также и арабский до введения использования цифр индийского происхождения, которые впоследствии, в той или иной мере видоизменяясь, приходят оттуда и в средневековую Европу; можно заметить по этому поводу, что само слово «цифра» есть не что иное, как арабское *ṣifr*, хотя это слово было на самом деле лишь обозначением нуля. Верно, что в древнееврейском, с другой стороны, *saphar* означает «считать» или «перечислять», а также «писать», откуда *sepher*, «письмо» или «книга» (на арабском *ṣifr*, слово, которое, в частности, обозначает священную книгу), и *sephar*, «перечисление» или «расчет»; от этого последнего слова идёт также обозначение *сефирот* в Каббале, которые были перечислением принципов, уподобляемых божественным атрибутам.

торых сами они не понимают, и которые являются чем-то вроде следов забытых традиций; более серьёзным является тот факт, что они не только не спрашивают себя, каким может быть этот смысл, но, кажется, даже и не желают, чтобы он вообще был. В действительности они все больше и больше склоняются к тому, чтобы рассматривать всякое обозначение как простую «конвенцию», под которой они понимают нечто такое, что устанавливается полностью случайным образом, что, в сущности, совершенно невозможно, так как конвенция никогда не устанавливается, если для этого нет причины, и причины именно такой-то, а не любой другой; только для тех, кто этой причины не знает, конвенция может быть произвольной, так же как для тех, кто не знает причины события, оно может показаться «непредвиденным»; именно это здесь и происходит, и мы можем видеть в этом одно из самых крайних последствий отсутствия принципа, доходящего даже до утраты наукой, или тем, что так называют, так как тогда она больше ни в каком отношении не заслуживает этого названия, всякого правдоподобия. Между прочим, в силу самого факта существования сегодня концепции исключительно количественной науки, этот «конвенционализм» распространяется постепенно из математики в физику, в её самые последние теории, тем самым все больше и больше удаляющиеся от той реальности, которую они стремятся объяснить; мы достаточно останавливались на этом в другой работе, чтобы избавиться от необходимости говорить об этом что-то ещё, тем более что теперь нас более частным образом занимает одна лишь математика. Мы добавим только, что когда полностью утрачивается смысл обозначения, то слишком легко перейти от правомерного и обоснованного его использования к использованию неправомерному, которое больше в действительности ничему не соответствует и которое может быть даже иногда совершенно нелогичным; это может показаться странным, когда речь идёт о такой науке, как математика, которая должна иметь с логикой особенно тесные связи, и тем не ме-

нее, не погрешив против истины, можно отметить немало нелогичного в математических понятиях, какими они обычно рассматриваются в нашу эпоху.

Один из наиболее замечательных примеров таких нелогичных понятий, тот, что мы прежде всего должны здесь рассмотреть, хотя он будет и не единственным, с которым мы столкнемся в ходе нашего изложения, — это пример с так называемой математической или количественной бесконечностью, которая является источником почти всех затруднений, встающих на пути исчисления бесконечно малых или, может быть точнее, на пути метода исчисления бесконечно малых, так как что бы об этом ни думали «конвенционалисты», есть в этом нечто такое, что превосходит значение простого «расчета» в обычном смысле этого слова; есть исключение, которое надо сделать для тех из этих затруднений, которые происходят от ошибочной или неудовлетворительной концепции понятия «предела», необходимого для обоснования строгости этого метода исчисления бесконечно малых и для того, чтобы сделать из него нечто иное, нежели простой метод аппроксимации. Впрочем, как мы увидим, необходимо делать различие между тем случаем, где так называемое бесконечное выражает лишь простой абсурд, то есть идеей, которая сама по себе противоречива как идея «бесконечного числа», и тем случаями, где бесконечное неправомерным образом используется в смысле неопределённого; однако не следовало бы полагать, что само смешение бесконечного и неопределённого сводится к простой проблеме употребления слов, так как на самом деле оно распространяется и на сами идеи. Странно, что такое смешение, которое было бы достаточно рассеять, чтобы в корне пресечь многие дискуссии, было совершено и самим Лейбницем, который обычно рассматривается как изобретатель исчисления бесконечно малых и которого мы назовем, скорее, автором его «формулы», так как этот метод соответствует некоторым реальностям, которые как таковые обладают существованием, не зависящим о того, кто их мыс-

лит и кто их с большим или меньшим совершенством выражает; реальности математического порядка могут быть, как и все остальные, лишь открыты, а не изобретены, тогда как, наоборот, именно об «изобретении» идёт речь, когда, увлекаясь «игрой» обозначений, оказываются в царстве чистой фантазии; но насколько трудно разъяснить это различие математикам, которые охотно воображают, что вся их наука не является и не должна являться чем-то иным, кроме «конструкции человеческого разума», что, разумеется, сводило бы её, если бы в это пришлось поверить, к тому, чем на самом деле она не является! Как бы то ни было, Лейбниц никогда так и не смог ясно объясниться по поводу принципов своего исчисления, и именно это и доказывает, что здесь есть нечто такое, что было выше его понимания и что привлекало его к себе, хотя он этого и не осознавал; если бы он отдавал себе в этом отчет, он бы, разумеется, не вступил по этому поводу в спор о «приоритете» с Ньютоном, и, между прочим, такие споры всегда являются совершенно напрасными, так как идеи в той мере, в какой они истинны, не могут быть личной собственностью, несмотря на современный «индивидуализм», и было бы ошибкой приписывать эту собственность человеческим индивидам. Мы не будем более распространяться по поводу этого вопроса, который мог бы увести нас довольно далеко от предмета нашего исследования, хотя было бы, может быть, небесполезно в некоторых отношениях разъяснить, что роль тех, кого называют «великими людьми», часто, в большинстве случаев, является ролью «приемника», хотя сами они обычно первые и строят иллюзии по поводу своей «оригинальности».

В данный момент нас непосредственно более заботит следующее: если мы должны констатировать такие недостатки у Лейбница, и тем более серьёзные недостатки, поскольку они касаются принципиальных вопросов, то как может обстоять дело с другими современными философами и математиками, которых он, разумеется, несмотря ни на что, превосходит? Это превосходство ему, с одной стороны, обеспе-

чивает предпринятое им изучение средневековых схоластических учений, хотя он и не всегда их полностью понимал, а с другой — некоторые эзотерические сведения, полученные главным образом от розенкрейцеров[4], сведения, очевидно, весьма неполные и даже фрагментарные, которые, впрочем, ему довольно плохо удавалось применять, и мы ещё увидим здесь несколько примеров такого применения; с этими двумя «источниками», если выражаться так, как выражаются историки, необходимо связывать в конечном счёте всё то, что имеется действительно ценного в его теориях, и именно это и позволяло ему, пусть и несовершенно, выступать против картезианства, которое представляло собой тогда, в области науки и философии, всю совокупность наиболее специфичных для Нового времени концепций и тенденций. Этого замечания в конечном счёте достаточно, чтобы несколькими словами объяснить всё то, чем был Лейбниц, и если мы хотим его понять, то никогда не следует упускать из виду эти общие указания, которые мы по этой причине и сочли нужным с самого начала сформулировать; но пора оставить эти предварительные рассуждения, чтобы приступить к изучению тех самых вопросов, которые позволят нам определить истинное значение исчисления бесконечно малых величин.

[4] Бесспорный знак такого влияния обнаруживается в герметической фигуре, размещённой Лейбницем на титульном листе своего трактата *De Arte combinatorial*: это изображение *Rota Mundi*, «мирового колеса», на котором в центре двойной креста стихий (огня и воды, воздуха и земли) и качеств (тепла и холода, сухости и влажности), *quinta essentia* символизирует роза с пятью лепестками (соответствующая эфиру, рассматриваемому и как сам эфир, и как принцип четырёх остальных элементов); естественно, эта «сигнатура» осталась полностью незамеченной всеми университетскими комментаторами!

Глава I. Бесконечное и неопределённое

Двигаясь в каком-то отношении в противоположном профанной науке направлении, мы должны, следуя свойственной традиционной науке точке зрения, в первую очередь обосновать здесь принцип, который позволит нам впоследствии почти прямым образом разрешить затруднения, вызываемые методом исчисления бесконечно малых, не позволяя себе вдаваться в дискуссии, рискующие быть бесконечными, какими они и являются на самом деле для современных философов и математиков, которым в силу того самого принципа, которого им недостает, никогда не удавалось найти для этих затруднений удовлетворительное и окончательное решение. Этот принцип — это сама идея бесконечного, понимаемая в её истинном смысле, который является чисто метафизическим, и нам в связи с эти следует лишь кратко напомнить о том, что мы уже изложили ранее[5]: бесконечное — это, собственно говоря, то, что не имеет пределов, так как конечное является, очевидно, синонимом предела; нельзя, следовательно, без злоупотреблений применять это слово к чему-то иному, нежели то, что не имеет абсолютно никакого предела, то есть к чему-то иному, нежели универсальное целое, которое включает в себя все возможности и которое, как следствие, не может быть никоим образом чем бы то ни было ограниченным; бесконечное, таким образом понятое, является метафизически и логически необходимым, так как оно не только не может подразумевать никакого противоречия, не заключая в себе ничего отрицательного, но, наоборот, его отрицание и было бы противоре-

[5] Генон Р. «Множественные состояния существа». Глава I. Волшебная гора. 2007. № XIV.

чивым. Кроме того, очевидно, что может существовать лишь одно бесконечное, так как два бесконечных, предполагаемых различными, ограничивали бы друг друга, и, следовательно, неизбежно бы друг друга исключали; следовательно, всякий раз, когда слово «бесконечное» используется в ином смысле, чем тот, о котором мы только что говорили, мы можем быть *a priori* уверены, что такое использование неизбежно является неправомерным, так как в конечном счёте оно означает, что метафизическое бесконечное либо просто игнорируют, либо предполагают рядом с ним другое бесконечное.

Схоласты, правда, допускали то, что они называли *infinitum secundum quid*, которое они строго отличали от *infinitum absolutum*, единственного, являвшегося метафизической бесконечностью; но мы можем увидеть здесь лишь несовершенство терминологии, так как если это различие и позволяло им избегать противоречия множества бесконечностей, понятых в собственном смысле слова, то тем не менее верно, что такое двойное использование слова *infinitum* рискует вызвать большую путаницу и что, между прочим, один из двух смыслов, которым они его наделяли, был ему совершенно несвойственен, так как сказать, что что-то бесконечно только в некотором отношении, что и является точным значением выражения *infinitum secundum quid*, значит сказать, что на самом деле оно ни в коей мере не является бесконечным[6]. В действительности, не потому что какая-то вещь не ограничена в определённом смысле или в определённом отношении, можно было бы сделать вывод, что она вообще не ограничена, что было бы необходимо для того, чтобы она была действительно бесконечной; она не только могла бы быть в то же самое время ограниченной в других отношениях, но мы можем даже сказать, что она неизбежно такой и является ввиду того, что она есть некото-

[6] В довольно близком к этому смысле Спиноза использовал позже выражение «бесконечное в своем роде», что, естественно, даёт повод тем же самым возражениям.

рая определённая вещь, которая благодаря самому своему определению, не включает в себя любую возможность, так как это означает, что она ограничена тем, что оставляет вне себя; если, наоборот, универсальное целое бесконечно, то именно потому, что оно ничего не оставляет вне себя[7]. Любое определение, каким бы общим его ни полагали, и какое расширение оно ни могло бы получить, неизбежно, следовательно, исключает истинное понятие бесконечного[8]; определение, каким бы оно ни было, всегда является ограничением, поскольку его существенной чертой является то, что оно определяет некоторую область возможностей по отношению ко всему остальному и тем самым это остальное исключает. Таким образом, совершенно бессмысленно применять идею бесконечного к какому-либо определению, например в случае, который мы здесь рассматриваем более специально, к количеству или к той или иной из его модальностей; идея «определённой бесконечности» слишком явно противоречива, чтобы на ней было бы уместно более останавливаться, хотя это противоречие часто ускользает от профанного мышления современников, и даже те, кого можно назвать «полупрофанами», не могли, как Лейбниц, его заметить[9]. Чтобы сделать это противоречие ещё более явным, мы могли бы сказать в других терминах которые, по сути, эквивалентны, что очевидным абсурдом является желание дать дефиницию бесконечному: дефиниция на самом деле есть не что иное, как выражение определения, и сами слова доста-

---

[7] Можно также сказать, что оно оставляет вне себя лишь невозможное, которое, будучи чистым ничто, не могло бы его никоим образом ограничивать.

[8] Это в равной мере истинно и для определений универсального порядка, а не только общего, включая само Сущее, которое является первым из всех определений; но само собой разумеется, что такое замечание не должно иметь отношения только к космологическим приложениям, с которыми мы имеем дело в настоящем исследовании.

[9] Если вызывает удивление выражение «полупрофан», которое мы здесь используем, мы скажем, что оно может быть оправданным и даже весьма точным благодаря различию эффективной инициации и инициации виртуальной, по поводу которого нам предстоит объясниться в другом случае.

точно ясно говорят, что то, что способно быть определённым, может быть лишь конечным или ограниченным; стремление вместить бесконечное в формулу или, если угодно, наделить его какой бы то ни было формой — это сознательная или бессознательная попытка ввести универсальное целое в один из самых ничтожных элементов, который в него включен, что, очевидно, явно невозможно.

Того, что мы только что сказали, достаточно, чтобы установить, не оставляя места ни малейшему сомнению и не испытывая потребности входить в какие-либо иные соображения, что не может быть математической или количественной бесконечности, что само это выражение не имеет никакого смысла, потому что само количество является определением; число, пространство, время, к которым можно применить понятие этой мнимой бесконечности, являются определёнными условиями, которые, как таковые, могут быть лишь конечными; здесь перед нами некоторые возможности, или некоторые совокупности возможностей, рядом с которыми или вне которых существуют другие, что, очевидно, подразумевает их ограничение. Кроме того, в этом случае есть ещё нечто большее: мыслить бесконечное количественно — значит не только его ограничивать, но ещё мыслить его как способное к увеличению или уменьшению, что не менее абсурдно; с подобными рассуждениями мы не только скорее придем к множеству бесконечностей, которые сосуществовали бы, не смешиваясь друг с другом, не исключая друг друга, но также и к бесконечностям, которые являются большими или меньшими, чем иные бесконечности, и даже к бесконечности, становящейся при таких условиях столь относительной, что изобретается некое «трансфинитное», то есть область величин, больших, чем бесконечность; и именно об «изобретении» речь тогда и идёт, поскольку такие концепции не могут соответствовать ничему реальному: сколько слов, столько и нелепостей, даже в отношении простой элементарной логики, что не мешает тем, кто эти концепции поддерживает, обладать пре-

тензией быть «специалистами» в логике, настолько велика интеллектуальная путаница нашей эпохи!

Мы должны заметить, что мы только что сказали не только «мыслить количественное бесконечное», но и «мыслить бесконечность количественно», и это требует некоторого объяснения: мы этим желали особо обратиться к тем, кого на современном философском жаргоне называют «инфинитистами»; на самом деле все дискуссии между «финитистами» и «инфинитистами» ясно показывают, что и те и другие имеют по меньшей мере ту общую и полностью ложную идею, что метафизическая бесконечность тесно связана с математической бесконечностью, даже если она просто с ней не отождествляется[10]. Все они в равной мере игнорируют самые элементарные принципы, поскольку, наоборот, как раз сама концепция истинной метафизической бесконечности одна только и может отвергать безусловным образом любую «частную бесконечность», если можно так выразиться, такую, как мнимая количественная бесконечность, и быть заранее уверенной, что повсюду, где мы её встретим, она может быть лишь иллюзией, по поводу которой будет уместно лишь задать вопрос о том, что её породило, чтобы суметь заменить её иным понятием, более соответствующим истине. В итоге всякий раз, когда речь идёт о чём-то частном, об определённой возможности, мы благодаря этому *a priori* уверены, что она ограничена и, можно сказать, ограничена самой своей природой, и это в равной мере истинно и в том случае, когда по какой-либо причине мы сегодня не можем достичь её границ; но именно эта невозможность достичь границ некоторых вещей и даже иногда ясно их представлять, вызывает по крайней мере у тех, кому недостаёт метафизического принципа, иллюзию, что эти вещи

[10] Мы здесь приведём в пример весьма характерный случай Л. Кутюра, завершившего свою диссертацию «О математической бесконечности», в которой он попытался доказать бесконечность числа и величины заявлением, что его намерением было доказать, что, «несмотря на неокритицизм (то есть, на теории Ренувье и его школы), инфинитистская метафизика возможна».

не имеют границ и, повторим ещё раз, именно эта иллюзия, и ничего более, сформулирована в противоречивом утверждении об «определённой бесконечности».

Именно здесь, чтобы исправить это ложное понятие или, скорее, чтобы заменить его истинной концепцией вещей[11], идея бесконечности, которая как раз и есть идея раскрытия возможностей, границ которых мы не можем сейчас достичь; и поэтому мы рассматриваем как фундаментальное, во всех вопросах, где возникает мнимая математическая бесконечность, различие бесконечного и неопределённого. Несомненно, именно этому соответствовало, по замыслу его авторов, схоластическое различие *infinitum absolutum* и *infinitum secundum quid*, разумеется, досадно, что Лейбниц, который, между прочим, многое заимствовал из схоластики, пренебрегал этим различием или игнорировал его, так как какой бы несовершенной ни была форма, в которой оно было выражено, оно могло бы ему помочь легко ответить на некоторые из возражений, выдвигаемых против его метода. Декарт, кажется, наоборот, пытался установить то различие, о котором идёт речь, но он был весьма далёк от того, чтобы выразить и даже понять его с достаточной ясностью, поскольку, согласно его мнению, неопределённое — это то, границ чего мы не видим, и что в реальности могло бы быть бесконечным, хотя мы и не можем утверждать, что оно таковым является, тогда как истина в том, что мы, наоборот, можем утверждать, что оно не является таковым, и что нет никакой надобности видеть его границы, чтобы быть уве-

[11] Уместно со всей логической строгостью сделать различие между «лже-понятием» (или, если угодно, «псевдопонятием») и «ложным понятием»: «ложное понятие» — это понятие, которое адекватно не соответствует реальности, хотя оно и соответствует ей в некоторой мере; наоборот, «лже-понятие» — это понятие, которое подразумевает противоречие, так как здесь перед нами именно этот случай, и это понятие не является на самом деле понятием, даже ложным, хотя оно и имеет видимость такового для тех, кто не воспринимает противоречие, так как оно выражает лишь невозможное, которое суть то же самое, что и ничто, оно абсолютно ничему не соответствует; «ложное понятие» способно быть исправленным, но «лже-понятие» может быть лишь просто отвергнуто.

ренным, что их не существует; мы видим, насколько всё это туманно и затруднительно для восприятия, и всегда по причине одного и того же отсутствия принципа. Декарт на самом деле говорит: «Мы же всё то, для чего не можем установить в каком-то смысле[12] границы, не будем рассматривать как бесконечное, но лишь как беспредельное»[13]. И он приводит в качестве примеров протяженность и делимость тел; он не утверждает, что вещи являются бесконечными, но тем не менее, кажется, он не желает формально этого и отрицать, тем более, что он только что заявлял, что он не хочет «утруждать себя рассуждениями о бесконечном», что является слишком простым способом избавиться от затруднений, несмотря на то что немного далее он скажет, что мы «не можем позитивно постичь отсутствие в каком-то отношении границ также у некоторых других вещей, но вынуждены признать, что мы не способны даже негативно приписать этим вещам какие-либо границы, пусть они ими и обладают»[14]. В итоге он желает, и вполне обоснованно, сохранить название бесконечного для того, что не может иметь никакой границы; но, с одной стороны, он, кажется, не знает с той абсолютной уверенностью, какую подразумевает любое метафизическое знание, что то, что не имеет никакой границы, не может быть чем-то иным, кроме универсального целого, а с другой стороны, само понятие неопределённого нуждается в ещё больших уточнениях, нежели делает он;

---

[12] Эти слова, кажется, напоминают о схоластическом *secundum quid* и, следовательно, возможно, что первым замыслом фразы, которую мы цитируем, было намерение косвенной притоки выражения *infinitum secundum quid*.

[13] Декарт Р. «Первоначала философии». I, 26. Декарт Р. Соч. В 2 т. Т. 1.М., 1989, стр. 324.

[14] Там же. 1, 27, стр. 325.

если бы они были сделаны, то большое число более поздних смешений не появилось бы на свет так легко[15].

Скажем, что неопределённое не может быть бесконечным, потому что его понятие всегда предполагает некоторое определение, идёт ли речь о протяженности, о длительности, или о какой-либо иной возможности; одним словом, неопределённое, каким бы оно ни было и под каким бы аспектом его ни рассматривали, является ещё конечным и может быть только конечным. Разумеется, его границы отодвинуты до того, что находятся вне нашей досягаемости, по крайней мере пока мы их стремимся достичь определённым способом, который мы можем назвать «аналитическим», что мы объясним более полно впоследствии; но они тем самым ни в коей мере не упраздняются, и в любом случае, если ограничения определённого уровня и могут быть упразднены, на смену им приходят другие, основанные на самой природе того, что рассматривается, так как именно в силу своей природы, а не просто какого-то случайного и более или менее внешнего обстоятельства любая частная вещь конечна, до какой степени нельзя было бы довести на самом деле то расширение, на которое она способна. Можно по этому поводу заметить, что знак ∞, которым математики изображают свою мнимую бесконечность, сам является замкнутой, то есть очевидно конечной фигурой, так же как и круг, который некоторые желали бы сделать символом вечности, тогда как он может быть лишь изображением временного цикла, неопределённого только на своем уровне, то есть символом того, что называется, собственно говоря, не-

[15] Это Вариньон в его переписке с Лейбницем по поводу исчисления бесконечно малых использует, не различая, слова «бесконечное» и «неопределённое», как если бы они были почти синонимами, или по крайней мере как если бы он был в каком-то отношении равнодушен, принимая одно за другое, тогда как, наоборот, именно различие их значений должно было во всех дискуссиях рассматриваться как ключевой пункт.

прерывностью[16]; легко увидеть, что такое смешение вечности и непрерывности, столь привычное для современных людей Запада, тесно связано со смешением бесконечности и неопределённости.

Чтобы лучше понять идею неопределённого и тот способ, которым она формируется на основе конечного, понимаемого в его изначальном значении, можно рассмотреть пример с последовательностью чисел: в этой последовательности никогда нельзя остановиться на определённой точке, поскольку за любым числом всегда имеется другое, которое достигается путём добавления к нему единицы; следовательно, нужно, чтобы ограничение этой неопределённой последовательности было иного рода, чем то, что применяется к определённой совокупности чисел, взятой между какими-то двумя определёнными числами; необходимо, следовательно, чтобы такое ограничение опиралось не на частные свойства некоторых чисел, но на саму природу числа во всей её всеобщности, то есть на определение, которое, образуя, по сути дела, эту природу, заставляет число быть тем, что оно есть, и не быть чем-то иным. Можно в точности повторить тот же самый довод, если бы речь шла не о числе, но о пространстве или о времени, также рассматриваемом во всем том расширении, на какое они способны[17]; такое расширение, каким бы неопределённым его ни мыслили и каким бы неопределённым оно ни было на самом деле, никогда в действительности не сможет никоим образом вы-

[16] Необходимо также отметить, что, как мы уже объясняли в ином месте, такой цикл никогда на самом деле не является замкнутым, но только кажется таковым, поскольку размещается в перспективе, которая не позволяет воспринимать реально существующее расстояние между его крайними точками, подобно тому резьба винта на вертикальной оси предстаёт как круг, когда он проецируется на горизонтальную плоскость.

[17] Было бы, следовательно, бесполезно говорить, что пространство, например, может быть ограничено лишь этой последовательностью со всей неопределённостью которую она предполагает, и поэтому пространство вообще не могло бы быть ограничено ничем; наоборот, оно ограничено самим определением, которое образует его собственную природу пространства и которое оставляет место вне его всем непространственным возможностям.

вести нас из конечного. Дело в том, что поскольку конечное неизбежно предполагает бесконечное, поскольку бесконечное — это то, что выключает в себя и охватывает собой все возможности, неопределённое, наоборот, происходит от конечного, оно в действительности является лишь его раскрытием, и поэтому его всегда можно к нему свести, так как очевидно, что из конечного нельзя каким бы то ни было процессом извлечь ничего, кроме того, что в нём уже потенциально содержалось. Вновь обращаясь к тому же самому примеру с последовательностью чисел, мы можем сказать, что эта последовательность со всей неопределённостью, которую она предполагает, дана нам посредством закона её формирования, поскольку именно сам этот закон непосредственно и следует из её неопределённости; этот закон заключается в том, что если дано какое-то число, то следующее число образуется путём добавления к нему единицы. Последовательность чисел образуется, следовательно, последовательными и бесконечно повторяемыми добавлениями единицы к ней самой, что, в сущности, является лишь неопределённым расширением какой-либо арифметической суммы; здесь ясно видно, как неопределённое образуется на основе конечного. Этот пример обязан, между прочим, своей особой ясностью дискретному характеру числовой величины; но если брать вещи более общим и применимым ко всем случаям способом, то было бы достаточно в этом отношении остановиться на идее «становления», которая подразумевается термином «неопределённое» и которую мы выше выразили, сказав о раскрытии возможностей, раскрытии, которое само по себе и во всем своем течении, всегда предполагает нечто незавершенное[18]; важность рассмотре-

[18] См.: замечание А. К. Кумарасвами о платоновском понятии «меры», которое мы приводили в другом месте («Царство количества и знамения времени». Глава III); «неизмеримое» — это то, что ещё не было определено, то есть в итоге неопределённое, и оно в то же самое время и благодаря этому является тем, что лишь неполностью осуществлено в проявлении.

ния «переменных» в том, что касается исчисления бесконечно малых, сообщает этому последнему все его значение.

Глава II. Противоречие «бесконечного числа»

Есть случай, где, как мы впоследствии ясно увидим, достаточно заменить идею мнимой бесконечности идеей неопределённости, чтобы незамедлительно устранить любые трудности; но есть и иные, где сделать это невозможно, потому что речь идёт о чём-то ясно определённом, об «установленном» в каком-то отношении гипотезой, что как таковое не может быть названо неопределённым в соответствии с замечанием, сделанным нами в последнюю очередь: так, например, можно сказать, что последовательность чисел является неопределённой, но нельзя сказать, что некоторое число, каким бы большим его ни предполагали и какой бы ранг оно ни занимало в этой последовательности, представляет собой нечто неопределённое. Идея «бесконечного числа», понимаемого как «самое большое из всех чисел» или как «число всех чисел», или ещё как «число всех единиц» — это идея, на самом деле сама по себе противоречивая, невозможная даже тогда, когда мы откажемся от неоправданного использования слова «бесконечность»: не может быть числа, которое было бы больше, чем все остальные, так как каким бы большим ни было число, всегда можно образовать ещё большее, добавив к нему единицу в соответствии с законом образования чисел, который мы сформулировали выше. Это означает, что последовательность чисел не может иметь последнего члена, и именно потому, что она не «завершается», она на самом деле и является неопределённой; поскольку число всех её членов может быть лишь последним из них, можно также сказать, что она не «исчисляема», и именно к этой идее нам впоследствии ещё предстоит вернуться.

Невозможность «бесконечного числа» может быть установлена с помощью различных аргументов; Лейбниц, кото-

рый по крайней мере ясно это осознавал[19], использовал тот, что заключается в сравнении последовательности четных чисел с последовательностью всех целых чисел: любому числу соответствует другое число, равное его двойному значению, и поэтому можно установить соответствие всех членов одной последовательности всем членам другой, из чего следует, что число членов должно быть одним и тем же и в той и в другой последовательности; но, с другой стороны, очевидно, имеется в два раза больше целых чисел, чем чисел четных, поскольку четные числа размещаются одно к двум в последовательности целых чисел; таким образом, мы приходим к явному противоречию. Можно обобщить этот аргумент, взяв вместо последовательности четных чисел, то есть умноженных на два, последовательность чисел, умноженных на какое-то число, и доказательство будет идентичным; можно также взять тем же самым способом последовательность квадратов целых чисел[20] или, более общим образом, последовательность их степеней любой величины. Во всех случаях вывод, к которому приходят, один и тот же: последовательность, которая включает лишь часть целых чисел, должна иметь то же самое число членов, что и последовательность, которая включает их все, что означает, что целое не может быть больше, чем его часть; и виду того, что мы допускаем, что есть число всех чисел, невозможно избежать этого противоречия. Однако некоторые считали, что сумели его избежать, допустив в то же самое время, что есть числа, начиная с которых умножение на определённое число или возведение в некоторую степень более невозможно, потому что оно даёт результат, который превосходит мнимое «бесконечное число»; так же обстоит дело и с теми, кто вынужден на деле рассматривать числа, называемые «больши-

[19] «Вопреки моему исчислению бесконечно малых, — писал он в частности, — я не допускаю истинное бесконечное число, хотя я признаю, что множество вещей превосходит любое конечное число или, скорее, любое число».

[20] Именно это делал Каши, который, впрочем, приписывал этот аргумент Галилею («Семь лекций по общей физике»).

ми, чем бесконечность», откуда теории, подобные теории «трансфинитного» у Кантора, которые могут быть весьма изобретательными, но которые логически несостоятельны[21]: укладывается ли в голове, что можно называть «бесконечным» число, которое, наоборот, является настолько «конечным», что оно даже не является самым большим из всех? Между прочим, в подобных теориях могли бы быть числа, к которым никакие правила обычного исчисления уже неприменимы, то есть в итоге числа, которые на самом деле уже не являются числами и которые могут быть названы числами лишь в силу конвенции; [22] это неизбежно и происходит, когда, стремясь мыслить «бесконечное число» иначе, как самое большое число, рассматривают различные «бесконечные числа», предполагаемые между собой неравными, и им приписываются свойства, не имеющие больше ничего общего со свойствами обычных чисел; таким образом, избегают одного противоречия, чтобы впасть в другие, и, по сути дела, всё это лишь продукт «конвенционализма», настолько лишённого смысла, насколько это можно представить.

Так, идея мнимого «бесконечного числа», каким бы образом её ни представляли и каким бы названием её ни желали обозначать, всегда содержит в себе противоречивые элементы; впрочем, нет никакой надобности в этом абсурдном предположении, как только мы создаем точную концепцию того, чем реально является неопределённость числа, и при-

---

[21] Уже в эпоху Лейбница Валлис рассматривал *spatia plus quam infinita*, такое мнение, отвергнутое Вариньоном как подразумевающее противоречие, было поддержано также Гвидо Гранди в его книге *De Infinitis infinitorum*. С другой стороны, Жан Бернулли в ходе своих дискуссий с Лейбницем, писал: *Si dantur termini infiniti, dabitur etiam terminus infinitesimus (non dico ultimus) et qui eum sequuntur*, что хотя и не было объяснено выше, всё же, кажется, указывает, что он допускал, что в числовой серии членов может быть такой, что находится «за пределами бесконечного».

[22] Нельзя никоим образом утверждать, что речь здесь идёт об аналогичном использовании идеи числа, так как это предполагало бы переход к иной области, нежели область количества, и, наоборот, именно к количеству, понимаемому в его самом буквальном смысле, все рассуждения такого рода исключительно и относятся.

знаём, кроме этого, что число, несмотря на его неопределённость, ни в коей мере не применимо ко всему, что существует. Нам не следует здесь останавливаться на этом последнем положении, поскольку мы его в достаточной мере объяснили в другом месте: число есть лишь модус количества, а само количество — это только категория или особый модус существа, несоразмерный ему, или, точнее, оно является лишь условием, свойственным некоторому состоянию бытия в совокупности универсального бытия; но именно это большинство наших современников понимают с трудом, привыкнув, что им следует стремиться все свести к количеству и даже все измерить числами[23]. Тем не менее в самой области количества есть вещи, которые ускользают от числа, как мы это ещё увидим в случае с непрерывностью; и даже не выходя за пределы рассмотрения одной лишь дискретной величины, мы уже вынуждены допустить, по крайней мере имплицитно, что число неприменимо ко всему, когда мы признаём, что множество всех чисел не может образовать число, что, впрочем, в конечном счёте является лишь применением той неоспоримой истины, что то, что ограничивает определенный порядок возможностей, должно неизбежно быть вне его и за его пределами[24]. Только должно подразумеваться, что такое множество, рассматриваемое либо как дискретное, как в случае, когда речь идёт о после-

[23] Так, Ренувье считал, что число применимо ко всему по меньшей мере идеально, то есть что всё само по себе «исчислимо» даже тогда, когда мы на деле это не можем «вычислить»; кроме того, он был целиком неправ относительно того смысла, который Лейбниц придавал понятию «множества», и никогда не мог понять, как его отличие от числа позволяло избежать противоречия «бесконечного числа».

[24] Мы тем не менее говорили, что частная или определённая вещь, какой бы она ни была, ограничена самой своей природой, но в этом нет никакого противоречия; на самом деле, именно благодаря отрицательной стороне этой природы она и ограничена (так как, как говорил Спиноза, *omnis determinatio negatio est*), то есть поскольку она исключает другие вещи и оставляет их вне себя, поэтому в конечном счёте именно сосуществование этих других вещей и ограничивает рассматриваемую вещь; именно поэтому, между прочим, универсальное целое, и только оно одно, не может быть ничем ограничено.

довательности чисел, либо как непрерывное, к которому нам ещё предстоит далее вернуться, ни в коей мере не может быть названо бесконечным, и здесь перед нами всегда лишь неопределённое; впрочем, именно это понятие множества мы и намерены теперь изучить более тщательно.

Глава III. Неисчислимое множество

Лейбниц, как мы видели, ни в коей мере не допускает «бесконечное число», поскольку он, наоборот, явно заявляет, что оно, в каком бы смысле мы его ни желали понимать, подразумевает противоречие; но вопреки этому он допускает то, что он называет «бесконечным множеством», даже не уточняя, что по крайней мере сделали бы схоласты, что здесь в любом случае может быть лишь *infinitum secundum quid*, и последовательность чисел для него — это пример такого множества. Однако, с другой стороны, в количественной области и даже в том, что касается непрерывной величины, идея бесконечного казалась ему всегда подозрительной в силу по меньшей мере возможного противоречия, так как, далеко не будучи адекватной идеей, она неизбежно включает в себя определённую долю путаницы, и мы можем быть уверены, что идея не предполагает никакого противоречия лишь тогда, когда мы отчётливо представляем все её элементы[25]; это почти не позволяет признать за этой идеей «символический», мы бы сказали даже «изобразительный» характер, и именно поэтому он никогда не осмеливался, как

[25] Декарт говорит только об идеях «ясных и отчетливых»; Лейбниц уточняет, что идея может быть ясной, не будучи отчетливой, в том, что она позволяет только узнать свой предмет и отличить его от всех остальных вещей, тогда как отчетливая идея — это та, которая является не только «отличающей» в данном смысле, но и «отличительной» в её элементах; идея может быть, впрочем, более или менее отчетливой, а адекватная идея — это та, что является отчетливой полностью и во всех своих элементах; но в то время, когда Декарт полагает, что можно иметь «ясные и отчетливые идеи» обо всех вещах, Лейбниц, напротив, считает, что одни лишь математические идеи могут быть адекватными, поскольку их элементы являются в некотором отношении определённым числом, тогда как все остальные идеи охватывают собой множество элементов, анализ которых никогда не может быть завершен, и поэтому они всегда остаются частично неясными.

мы увидим далее, ясно высказываться о реальности «бесконечно малых»; но само это затруднение и такая выражающая сомнение позиция ещё лучше выявляют отсутствие того принципа, который позволял бы ему допустить, что можно говорить о «бесконечном множестве». Можно также после этого задать вопрос о том, не считал ли он, что такое множество, чтобы быть «бесконечным», как он о нём говорит, должно быть не только «неисчислимым», что очевидно, но что само оно ни в коей мере не должно быть количественным, если брать количество во всей его широте и во всех его модальностях — это может быть истинным в некотором случае, но не во всех; как бы то ни было, это ещё один пункт, по которому он никогда явно не объяснялся.

Идея множества, которое превосходит любое число и которое, как следствие, не является числом, кажется, удивила большинство тех, кто обсуждал концепции Лейбница, как «финитистов», так и «инфинитистов»; она, впрочем, вовсе не присуща Лейбницу, как, кажется, все верили, и это была даже, наоборот, идея, совершенно обычная у схоластов[26]. Под этой идеей понималось, собственно говоря, всё то, что не является ни числом, ни «исчислимым», то есть всё то, что не зависит от дискретной величины, идёт ли речь о вещах, принадлежащих другим модальностям количества или о том, что полностью находится вне количественной области, так как речь здесь идёт об идее «трансцендентального» порядка, то есть об общих модусах существа, которые, в противоположность его специальным модусам, ему соразмерны[27]. Именно это позволяет говорить, например, о множе-

[26] Мы процитируем только один текст из множества других, который особенно ясен на этот счет: Qui diceret aliquam multitudinem esse infinitam, non diceret eam esse numerum, vel numerum habere; addit etiam numerus super multitudinem rationem mensurations. Est enim numerus multitudo mensurata per unum, ...et propter hoc numerus ponitur species quantitatis discretae, non autem multitudo, sed est de transcendentibus (Фома Аквинский, III Phys. 1. 8).

[27] Известно, что схоласты даже, собственно говоря, в метафизической части своих доктрин, никогда не выходили за пределы рассмотрения Сущего, и поэтому их метафизика фактически сводится к одной лишь онтологии.

стве божественных атрибутов, или также о множестве ангелов, то есть существ, принадлежащих состояниям, которые не подчинены количеству и где, как следствие, не может быть и речи о числе; это также позволяет нам рассматривать состояния существа или степени бытия как наделенные множественностью или пребывающие в неопределённом множестве, тогда как количество — это лишь особое условие одного из них. С другой стороны, идея множества, будучи, в противоположность идее числа, применимой ко всему, что существует, должна неизбежно иметь множества количественного порядка, особенно в том, что касается непрерывной величины, и именно поэтому мы сейчас сказали, что не будет верным во всех случаях рассматривать так называемое «бесконечное множество», то есть то, которое превосходит любое число, как полностью выходящее за пределы области количества. Более того, само число может рассматриваться как разновидность множества, но при условии, что мы добавим, что это, согласно выражению Фомы Аквинского, «множество, измеряемое единицей»; любой иной вид множества, не будучи «исчислимым», является и «неизмеримым», то есть он является не бесконечным, но, собственно говоря, неопределённым.

Необходимо по этому поводу отметить одно странное обстоятельство; для Лейбница это множество, которое не образует собой числа, является тем не менее «результатом единиц»[28]; что следует под этим понимать и о каких единицах может идти речь? Это слово «единица» может быть взято в двух совершенно различных смыслах: есть, с одной стороны, арифметическая или количественная единица, которая является первым элементом и исходным пунктом числа, а с другой стороны, то, что по аналогии обозначается как метафизическая единица, которая отождествляется с самим чистым Сущим; мы не видим, что возможно какое-то иное

[28] Лейбниц Г. В. Новая система природы и общения между субстанциями, а также о связи, существующей между душой и телом. Г. В. Лейбниц. Соч. В 4 т. Т. 1. М. 1982.

значение, кроме этих; но, между прочим, когда говорят об «единицах», используя это слово во множественном числе, это, очевидно, может быть лишь количественный смысл. Однако, если это так, то сумма единиц не может быть чем-то иным, кроме числа, и она ни в коей мере не может превосходить число; верно, что Лейбниц говорит о «результате», а не о «сумме», но это различие, даже если оно сделано намеренно, оставляет место для досадной неясности. Впрочем, он заявляет, что множество, не будучи числом, мыслится всё же по аналогии с числом: «Когда имеется больше вещей, — говорит он, — чем может быть понято под каким-то числом, то мы по аналогии наделяем их числом, которое мы называем бесконечным», хотя здесь перед нами лишь способ выражения, *modus loquendi*[29], и даже в такой форме весьма неправильный способ выражения, поскольку в реальности это ни в коей мере не число; но каким бы несовершенным ни было выражение и какой бы глубокой ни была путаница, для которой оно даёт повод, мы должны в любом случае допустить, что отождествление множества с числом, разумеется, не лежало в основе его мысли.

Другой момент, которому, кажется, Лейбниц придает огромное значение, заключается в том, что «бесконечное», каким он его мыслит, не образует собой целого[30]; именно это условие он считает необходимым для того, чтобы эта идея избежала противоречия, но здесь есть и иной пункт, который остается ещё изрядно туманным. Уместно спросить, о какого рода «целом» здесь идёт речь, и необходимо прежде всего полностью отбросить идею универсального целого,

---

[29] *Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, et de vero sensu Methodi infinitesimalis*, в *Acta Eruditorum*, Лейпциг, 1712.

[30] См.: в частности там же: *Infinitum continuum vel discretum proprie nec unum, nec totum, nec quantum est*, — где выражение *nec quantum*, кажется, означает, что для него, как мы выше указывали, «бесконечное множество» не следует понимать количественно, по крайней мере, под *quantum* он понимает здесь только определённое количество, как это было и в случае с мнимым «бесконечным числом», противоречивость которого он доказал.

которое, наоборот, как мы уже говорили с самого начала, является самой метафизической бесконечностью, то есть единственно истинной бесконечностью, и которая здесь ни в коей мере не затрагивается; действительно, идёт ли речь о дискретном или о непрерывном, «бесконечное множество», которое рассматривает Лейбниц, в любом случае относится к ограниченной и случайной области космологического, а не метафизического порядка. Речь, очевидно, идёт о целом, мыслимом как состоящее из частей, тогда как, как мы уже объясняли в ином месте[31], универсальное целое, собственно говоря, лишено частей, в силу самой своей бесконечности, так как, поскольку эти части неизбежно должны быть относительными и конечными, то они не могли иметь с ним никакой реальной связи, что означает, что они для него не существуют. Мы, следовательно, должны ограничиться относительно поставленного вопроса рассмотрением частного целого; но здесь также, и особенно в том, что касается способа составления такого целого и его связи со своими частями, необходимо рассматривать два случая, соответствующие двум весьма различным значениям одного и того же слова «целое». Прежде всего речь идёт о целом, которое не является ни чем-то большим, ни чем-то иным, кроме простой суммы своих частей, из которых оно складывается по способу арифметической суммы, и то, о чём говорит Лейбниц, по сути дела, очевидно, так как такой способ образования и есть тот, что свойствен числу, и он не позволяет нам превзойти число; но, правду говоря, такое понятие, вместо того чтобы представлять собой единственный способ, как им целое может мыслиться, не является тем же самым понятием истинного целого в наиболее строгом смысле этого слова. На само деле целое, которое является лишь суммой или результатом своих частей и которое, как следствие, логически за ними следует, есть, как целое, не что иное, как *ens rationis*, так как оно представляет собой «единое» и «це-

[31] Об этом см.: также «Множественные состояния существа». Гл. I.

лое» лишь в той мере, в какой мы его таковым мыслим; само по себе это, собственно говоря, лишь «собрание», и именно мы тем способом, каким мы его рассматриваем, наделяем его в некотором относительном смысле признаками единства и целостности. Наоборот, истинное целое, обладающее этими признаками в силу самой своей природы, должно быть логически предшествующим своим частям и быть от них независимым: таков случай непрерывной совокупности, которую мы можем разделить на произвольные части, то есть на части любой величины, но которая ни в коей мере не предполагает действительного существования этих частей; здесь именно мы придаем частям как таковым определённую реальность посредством идеального или действительного деления, и таким образом этот случай в точности противоположен предыдущему.

Теперь весь вопрос в конечном счёте состоит в том, чтобы знать, исключает ли Лейбниц, когда он говорит, что «бесконечное не является целым», этот второй смысл так же, как и первый; кажется, и даже с большой вероятностью, что исключает, поскольку это единственный случай, где целое было бы действительно «единым», и поскольку бесконечное, согласно его убеждению, не является *nec unum, nec totum*. Он также утверждает, что именно этот случай, а не первый, есть тот, что применим к живому существу или к организму, когда его рассматривают с точки зрения целостности; Лейбниц говорит: «Даже вселенная не является чем-то целым, и её не следует представлять как живое существо, душой которого является Бог, как это делали древние»[32]. Тем не менее, если это так, то не совсем ясно, как идеи бесконечного и непрерывного могут быть связанными, какими они

[32] Письмо Жану Бернулли. — Лейбниц здесь довольно голословно приписывает древним вообще мнение, которое на самом деле было лишь мнением некоторых из них; очевидно, он имел в виду теорию стоиков, которые представляли Бога только как имманентного Бога и отождествляли его с *Anima Mundi*. Само собой разумеется, что речь здесь идёт лишь о проявленной вселенной, то есть о «космосе», а не об универсальном целом, которое включает в себя все возможности, как непроявленные, так и проявленные.

чаще всего для него оказываются, так как идея непрерывного как раз и связывается, по крайней мере в некотором смысле, с этой второй концепцией целостности; но этот пункт может быть лучше понят впоследствии. В любом случае верно, что если Лейбниц и имел в виду третий смысл слова «целое», смысл чисто метафизический и превосходящий оба остальных, то есть имел в виду ту идею универсального целого, которую мы выдвинули с самого начала, то он не смог бы сказать, что идея бесконечного исключает целостность, так как в другом месте он заявляет: «Реальное бесконечное — это, может быть, само абсолютное, которое не состоит из частей, но которое, имея части, включает их в себя по высшей причине, как ступень совершенства»[33]. Здесь есть, по меньшей мере можно сказать, «свечение», так как на этот раз, словно в порядке исключения, он берёт слово «бесконечное» в его истинном смысле, хотя было бы ошибкой утверждать, что это бесконечное «имеет части», как бы это ни желали понимать; но странно, что тогда он ещё выражал свою мысль лишь в вызывающей сомнения и затруднения форме, словно точное значение этой идеи ещё не было для него установлено; возможно, оно никогда и не было на самом деле установлено, так как иначе не объяснить, почему оно столь часто отклоняется от своего собственного смысла и почему иногда было так трудно, когда он говорил о бесконечном, узнать, был ли он намерен брать этот термин «в строгом смысле», пусть даже и тщетно, или же видел в нём лишь простой «способ выражения».

[33] «Письмо Жану Бернулли». 7 июня 1698 г.

Глава IV. Измерение непрерывного

До сих пор, когда мы говорили о числе, мы имели в виду исключительно целое число, и так логически и должно было быть, поскольку мы рассматривали числовую величину как, собственно говоря, дискретную величину: в последовательности целых чисел всегда между двумя следующими друг за другом членами имеется совершенно определенный интервал, отмеченный разностью в единицу, существующую между этими двумя числами, который, когда мы придерживаемся рассмотрения целых чисел, не может быть никоим образом устранен. Впрочем, в реальности одно только целое число и является истинным числом, тем, что можно было бы назвать чистым числом; и ряд целых чисел, начинающийся с единицы, возрастает до неопределённости, никогда не доходя до последнего члена, предположение о котором, как мы видели, противоречиво; но само собой разумеется, что он полностью разворачивается в одном-единственном направлении, и поэтому противоположное направление, которое было бы уменьшающимся до неопределённости направлением, не могло бы быть его изображением, хотя с другой точки зрения имеется, как мы это покажем далее, некоторое соответствие и что-то вроде симметрии между рассмотрением неопределённо возрастающих величин и величин, до неопределённости уменьшающихся. Тем не менее на этом мы здесь не останавливаемся, и нам приходится рассматривать различные виды чисел, иных, нежели числа целые; это, как обычно говорят, расширения или обобщения идеи числа, и это в определённом отношении верно; но в то же самое время эти расширения являются также и изменениями, и именно об этом современные математики слишком легко забывают, потому что их «конвенционализм» вы-

нуждает их недооценивать происхождение этих расширений и их смысл. Фактически иные числа, нежели числа целые, всегда представляются прежде всего как изображения результатов операций, которые невозможны, когда придерживаются чисто арифметической точки зрения, той, что во всей строгости принадлежит лишь арифметике целых чисел: так, например, дробное число есть не что иное, как изображение результата деления, которое не осуществляется с точностью, то есть в реальности деления, которое следует назвать арифметически невозможным, что, впрочем, имплицитно признается, когда говорят, следуя терминологии обычной математики, что одно из двух рассматриваемых чисел не делимо на другое. Уместно теперь заметить, что определение, которое обычно дают дробному числу, абсурдно: дроби ни в коей мере не могут быть «частями единицы», как об этом говорят, так как истинная арифметическая единица неизбежно неделима и лишена частей; между прочим, именно из этого следует дискретность, характеризующая сущность числа, которое на её основе и формируется; но мы намерены увидеть, откуда происходит эта абсурдность.

На самом деле, совершенно неслучайно, что нам приходится таким образом рассматривать результат тех операций, о которых мы только что говорили, вместо того чтобы просто ограничиться утверждением об их невозможности; вообще говоря, это происходит именно вследствие применения числа, дискретной величины, к измерению величин, которые, как например пространственные величины, относятся к порядку непрерывного количества. Между этими модальностями количества существует такое различие в их природе, что соответствие одной из них другой нельзя в полной мере установить; чтобы в какой-то степени это устранить, стремятся сократить интервалы этого дискретного ряда, образованного рядом целых чисел, вводя между его членами другие числа, в первую очередь числа дробные, которые не имели бы никакого смысла за пределами такого рассмотрения. Теперь легко понять, что абсурдность, на ко-

торую мы только что указывали, та, что касается дефиниции дробей, берёт своё начало в смешении арифметической единицы и того, что называют «единицами измерения», единицами, которые являются таковыми лишь конвенционально и которые в реальности представляют собой величины иного рода, чем число, а именно геометрические величины. Единица длины, например, есть лишь определённая длина, выбранная по причинам, чуждым арифметике, длина, которой приводится в соответствие число 1 с целью суметь измерить с её помощью иные длины; но в силу самой природы дискретной величины всякая длина, пусть даже она и изображается нумерически единицей, всегда тем не менее делима и делима до неопределённости; можно, следовательно, сравнивая с ней другие длины, рассматривать части этой единицы измерения, но они ни в коей мере не станут из-за этого частями арифметической единицы; и только так на самом деле и вводится рассмотрение дробных чисел, как изображение отношений между величинами, которые как раз и не делимы друг на друга. Измерение величины не является на самом деле чем-то иным, нежели числовым выражением её отношения к другой величине того же вида, взятой как единица измерения, то есть, в сущности, как предел сравнения; именно поэтому обычный метод измерения геометрических величин основан, по сути дела, на делении.

Следует, впрочем, сказать, что в природе дискретного числа всегда неизбежно существует нечто такое, что не позволяет таким образом получить полный эквивалент непрерывного; можно как угодно сокращать интервалы, то есть в конечном счёте сокращать их до неопределённости и делать их меньшими, чем любая величина, которая будет дана заранее, но мы никогда не устраним их полностью. Чтобы лучше это понять, мы возьмем самый простой пример геометрической непрерывности, то есть прямую линию: рассмотрим полупрямую, простирающуюся до неопре-

делённости в некотором направлении[34] и условимся установить соответствие каждой её точки числу, которое выражает расстояние от этой точки до начала; последняя будет изображаться нулем, её расстояние до себя самой будет, очевидно, нулевым; исходя из этого начала целые числа будут соответствовать последовательным краям любых сегментов, равных между собой и равных единице длины; точки, установленные между ними, будут изображаться только дробными числами, поскольку их расстояние до начала не является точным произведением единицы длины. Само собой разумеется, что по мере того, как мы будем брать дробные числа, знаменатель которых будет все больше и больше, а разность, следовательно, все меньше и меньше, интервалы между точками, которым будут соответствовать эти числа, окажутся сокращенными в той же пропорции; можно таким образом уменьшать эти интервалы до неопределённости, по крайней мере теоретически, поскольку возможные знаменатели дробных чисел все являются целыми числами, последовательность которых возрастает до неопределённости[35]. Мы говорим «теоретически», потому что на самом деле множество дробных чисел является неопределённым, и мы никогда не сможем дойти до того, чтобы использовать его в целом; но предположим тем не менее, что все возможные дробные числа будут в идеале приведены в соответствие точкам рассматриваемой полупрямой: несмотря на неопределённое возрастание интервалов, на этой линии останется ещё множество точек, которым не будет соответствовать никакое число. Это может на первый взгляд показаться странным и парадоксальным, и однако в этом легко убедиться, так как такая точка может быть получена посредством весь-

[34] Мы увидим впоследствии в связи с геометрическим изображением отрицательных чисел, почему нам пришлось здесь рассматривать лишь полупрямую; впрочем, того факта, что ряд чисел разворачивается лишь в единственном направлении, уже, как мы выше говорили, достаточно, чтобы указать на причину.

[35] Это ещё будет уточнено, когда мы будем вести речь об обратных числах.

ма простой геометрической конструкции: построим квадрат, имеющий стороной сегмент прямой, крайними точками которого являются ноль и 1, и начертим ту из диагоналей этого квадрата, которая отходит от начала, затем окружность, центром которой будет начало, а радиусом диагональ; точка, где эту окружность разрывает полупрямая, не может быть изображена никаким целым или дробным числом, поскольку её расстояние до начала равно диагонали квадрата, а она несоизмерима с его стороной, то есть здесь с единицей длины. Таким образом, множества дробных чисел, несмотря на неопределённое возрастание их разностей, не может быть достаточно, чтобы заполнить, если можно так сказать, интервалы между точками, находящимися на линии[36], что означает, что это множество не является реальным и адекватным эквивалентом линейной непрерывности; следовательно, мы вынуждены, чтобы выразить меру некоторых длин, вводить ещё иные разновидности числа, которые и есть то, что называют несоизмеримыми числами, то есть теми, что не имеют общей меры с единицей. Таковы иррациональные числа, то есть те, что изображают результат извлечения невозможного арифметического корня, например квадратного корня из числа, которое не является полным квадратом; таким образом, в предшествующем примере отношение диагонали квадрата к его стороне и, как следствие, точка, расстояние которой до начала равно этой диагонали, может быть изображено лишь иррациональным числом $\sqrt{2}$, которое действительно несоизмеримо, так как не существует никакого целого или дробного числа, квадрат которого был бы равен 2; и помимо этих иррациональных чисел существуют ещё и иные несоизмеримые числа, геометрическое происхождение которых очевидно, как например число π, которое изображает отношение окружности к её диаметру.

[36] Важно отметить, что мы не говорим о точках, которые составляют или образуют линию, что соответствовало бы ложной концепции непрерывного, как это доказывают размышления, которые мы изложим выше.

Даже не вдаваясь в вопрос о «составе непрерывного», очевидно, что число, какой бы широтой ни наделяли его понятие, никогда к непрерывному полностью неприменимо: такое применение в конечном счёте всегда означает подмену непрерывного дискретным, интервалы которого могут быть весьма малыми, и даже превращение его все больше и больше в неопределённый ряд последовательных делений без того, чтобы они когда-либо могли бы быть устранены, так как в реальности нет «последних элементов», к которым такое деление могло бы привести, и непрерывная величина, какой бы малой она ни была, всегда останется до неопределённости делимой. Именно этим делениям непрерывного, собственно говоря, и соответствует рассмотрение дробных чисел; но — и здесь это особенно важно отметить — дробь, какой бы ничтожно малой она ни была, всегда является определённой величиной, а между двух дробей, каким бы малым ни предполагалось между ними различие, всегда существует также определенный интервал. Свойство неопределённой делимости, характеризующее непрерывные величины, очевидно, требует, чтобы можно было всегда брать элементы сколь угодно малые, и чтобы интервалы, существующие между этими элементами, могли также становиться меньшими, чем любая данная величина; но помимо этого — и именно здесь обнаруживается недостаточность дробных чисел и, мы можем даже сказать, любого числа, каким бы оно ни было, — эти элементы и эти интервалы, чтобы действительно перед нами была непрерывность, не должны мыслиться как нечто определённое. Как следствие, самое совершенное изображение непрерывной величины будет получено рассмотрением величин уже не застывших и определённых, как те, о которых мы только что говорили, но наоборот, переменных, потому что тогда и само их изменение можно будет рассматривать как осуществляющееся непрерывным образом; и такие величины должны быть способны до неопределённости уменьшаться, в силу их изменения, никогда не уничтожаясь и не доходя до «минимума»,

который был бы не менее противоречивым, чем «последние элементы» непрерывного: здесь, как мы увидим, перед нами как раз и обнаруживается истинное понятие бесконечно малых величин.

Глава V. Вопросы, которые вызывает метод исчисления бесконечно малых

Когда Лейбниц впервые изложил метод исчисления бесконечно малых[37], а также во многих других трудах, которые за этим последовали[38], он главным образом настаивал на использовании и применении новых исчислений, что вполне соответствовало новейшей тенденции приписывать большее значение практическим применениям науки, чем самой науке как таковой; было бы, впрочем, трудно сказать, существовала ли на самом деле такая тенденция у Лейбница, или же это было в рамках такого способа представить свой метод, что-то вроде уступки *с его* стороны. Как бы то ни было, чтобы обосновать метод, конечно же, недостаточно показать те преимущества, которые он мог иметь над иными ранее принятыми методами, и удобства, которые он может предоставить на практике для исчислений, а также результаты, которые он может дать фактически; именно это противники метода исчисления бесконечно малых не упускали возможности подчёркивать, и именно их возражения побудили Лейбница объясниться по поводу принципов и даже истоков его метода. По поводу последнего пункта он, возможно, никогда всего не рассказывал, но это, по сути дела, и неважно, так как гораздо чаще случайные причины открытия сами по себе являются лишь весьма незначительными обстоятельствами; в любом случае самое интересное, что нам следует выделить из данных им по этому поводу

[37] Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus //Acta Eruditorum. Leipzig, 1684.

[38] *De Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum*. 1686. Последующие работы все относятся к решению частных проблем.

указаний[39], заключается в том, что он начинал с рассмотрения «точно определимых» различий, существующих между числами, а затем переходил к различиям «точно не определимым», которые можно было представить между геометрическими величинами в силу их непрерывности, и даже придавал большое значение такому порядку, как в каком-то отношении «востребованному самой природой вещей». Отсюда следует, что бесконечно малые величины у него, естественно, не предстают перед нами непосредственным образом, но только как результат перехода от изменений дискретной величины к изменениям величины непрерывной и от применения первой к измерению второй.

Теперь, каково же точное значение этих бесконечно малых величин, которые, как упрекали Лейбница, он использовал, предварительно не определив, что же он под этим понимает, и позволяло ли ему это значение рассматривать своё исчисление как абсолютно строгое, или, наоборот, только как простой метод приблизительного расчета? Ответить на эти два вопроса значило бы тем самым и разрешить те наиболее важные возражения, которые были ему адресованы; но, к несчастью, он никогда этого с достаточной ясностью не делал, и даже его разнообразные ответы никогда не кажутся вполне примиримыми между собой. В связи с этим уместно будет заметить, что Лейбниц, помимо прочего, имел привычку различным образом объяснять одни и те же вещи в зависимости от того, к кому он обращался; разумеется, не нам его упрекать за такой образ действий, раздражающий лишь систематические умы, так как в принципе он всего лишь следовал инициатическим и, в частности, розенкрейцеровским предписаниям, следуя которым необходимо с каждым разговаривать на его собственном языке; однако иногда это у него довольно плохо получалось. На самом деле, если, очевидно, возможно облачить одну и ту же истину различными выражениями, то подразумевается, что это

[39] Вначале в его переписке, а затем в *Historia et origo Calculi differentiali*, 1714.

должно делаться без её искажений и сокращений и что следует всегда строго воздерживаться от любого способа высказываться, который мог бы дать повод для ложных концепций; именно этого Лейбниц и не мог делать в большинстве случаев[40]. Таким образом, он доводит «приспособление» до того, что иногда, кажется, соглашается с теми, кто желал видеть в его исчислениях лишь метод приблизительного расчета, так как ему приходится представлять его как что-то вроде аннотации «метода исчерпания» древних, способного облегчить открытия, но их результаты должны затем ещё быть проверены этим методом, если мы желаем дать им строгое доказательство; и тем не менее совершенно верно, что не в этом была основа его мысли, и что в реальности он видел в нём нечто большее, чем простое ухищрение, предназначенное сократить расчеты.

Лейбниц нередко заявлял, что бесконечно малые величины являются лишь «несравнимыми», но относительно точного смысла, в котором это слово следует понимать, ему приходилось давать объяснение не только едва ли удовлетворительное, но даже и весьма досадное, так как оно могло лишь дать оружие в руки его противникам, которые, между прочим, не упускали возможности его использовать; здесь он так же, разумеется, не выразил свою истинную мысль, и мы можем увидеть в этом другой пример, ещё более серьёзный, чем предыдущий, того чрезмерного «приспособления», которое вынуждает заменять ошибочные взгляды «адаптированным» выражением истины. Лейбниц писал: «Нет нужды брать здесь бесконечное в строгом смысле, но только таким образом, как в оптике, где лучи солнца исходят из бесконечно удалённой точки и поэтому считаются параллельными. И когда имеется множество степеней бесконечного или бесконечно малого, то это подобно тому, как

[40] На языке розенкрейцеров сказали бы, что это даже ещё больше, чем провал его проектов *characteristica universalis*, доказывает, что если он и имел какое-либо теоретическое представление о том, чем является «дар языков», он был всё же далёк от того, чтобы обладать им в действительности.

земной шар считается точкой по отношению к расстоянию до неподвижных звезд, а шар, который мы держим в руках, также является точкой в сравнении с полудиаметром земного шара, и поэтому расстояние до неподвижных звезд подобно бесконечному бесконечного по отношению к диаметру шара. Так как вместо бесконечного или бесконечно малого берутся величины настолько большие или настолько малые, что необходимо, чтобы ошибка была меньше, чем данная ошибка, и поэтому от стиля Архимеда отличие лишь в выражениях, которые являются более прямыми, чем наш метод, и более подходящими для искусства изобретать»[41]. Лейбницу не преминули заметить, что каким бы малым ни был земной шар по отношению к небосводу, или песчинка по отношению к земному шару, это тем не менее установленные и определённые величины, и что если одна из этих величин может рассматриваться как практически ничтожная в сравнении с другой, то это всё же лишь простой приблизительный расчет, и он ответил, что желал только «избежать тонкостей» и «предоставить всему миру осязаемое доказательство»[42], что вполне подтверждает нашу интерпретацию и что, сверх того, уже является проявлением «вульгаризаторской» тенденции современных ученых. Что довольно необычно, так это то, что он впоследствии писал: «По крайней мере нет ничего, что вынуждало бы считать, что я имел в виду на самом деле весьма малую величину, но всегда установленную и определённую», к чему он добавляет: «Впрочем, я писал уже несколько лет назад г-ну Бернулли, что бесконечные или бесконечно малые могут быть приняты за фикции, подобные мнимым корням[43], без того, чтобы это нанесло ущерб нашим исчислениям, и такие фикции бу-

[41] Mémoire de M. G. G. Leibniz touchant son sentiment sur le Calcul différentiel // Journal de Trévoux, 1701.

[42] Письмо Вариньону от 3 февраля 1702 г.

[43] Воображаемые корни были корнями отрицательных чисел; мы далее будем говорить о проблеме отрицательных чисел и о логических затруднениях, которые она вызывает.

дут полезными и обоснованными в реальности»[44]. Впрочем, на самом деле кажется, что он никогда точно не видел, в чём сравнение, им использованное, было ошибочным, так как он воспроизводит его в тех же самых терминах десятью годами позднее[45]; но, поскольку он явно заявляет, что его намерением было представить бесконечно малые величины как определённые, мы должны из этого сделать вывод, что для него смысл такого сравнения сводится к следующему: песчинка, хотя и не являясь бесконечно малой, может, тем не менее не будучи ощутимой, рассматриваться как таковая по отношению к земле, и поэтому нет нужды рассматривать бесконечно малые «во всей строгости», а можно даже, если угодно, рассматривать их лишь как фикции; но как бы его ни понимали, такое рассмотрение тем не менее очевидно непригодно для того, чтобы сообщить исчислению бесконечно малых иную идею, чем представление, разумеется, недостаточное и для самого Лейбница, о простом приблизительном расчёте.

[44] Письмо Вариньону от 14 апреля 1702.

[45] Цитированные выше воспоминания в *Acta Eruditorum*. Leipzig, 1712.

Глава VI. «Обоснованные фикции»

Мысль, которую постоянно выражает Лейбниц, хотя и не утверждает её всегда с одной и той же силой, и которую иногда даже, но в исключительных случаях, он, кажется, категорически не желает произносить, заключается в том, что бесконечные и бесконечно малые величины представляют собой всего лишь фикции; но, добавляет он, это «обоснованные фикции», и под этим он не просто понимает то, что они используются для расчета[46] или даже для того, чтобы «найти реальные истины», хотя ему в равной мере приходится настаивать и на такой полезности; но он постоянно повторяет, что эти фикции «обоснованы в реальности», что они имеют *fundamentum in re*, что, очевидно, подразумевает нечто большее, чем чисто утилитарную ценность; и в конечном счёте сама такая ценность должна у него объясняться тем основанием, которое эти фикции имеют в реальности. В любом случае он считает, что достаточно, чтобы метод был точным, рассматривать не бесконечные и бесконечно малые величины в строгом смысле этих выражений, поскольку этот строгий смысл не соответствует реальности, но величины насколько угодно большие и насколько угодно малые, или что необходимо, чтобы ошибка была меньшей, чем любая данная величина; необходимо было бы ещё изучить, верно ли, что, как он заявляет, такая ошибка тем самым оказывается ничтожной, то есть даёт ли ему такой способ рассматривать исчисление бесконечно малых совершенно строгое обоснование, но нам придется к этому вопросу вер-

[46] В таком рассмотрении практической полезности Карно считал, что нашёл достаточное обоснование; очевидно, что от Лейбница и до него «прагматическая» тенденция науки значительно усилилась.

нуться позже. Каким бы ни был этот последний пункт, выражения, где фигурируют бесконечные и бесконечно малые величины, выделяются у него в категорию утверждений, которые, говорит он, являются лишь *toleranter verae*, или теми, которые можно было бы назвать «терпимыми» и которые нуждаются в том, чтобы быть «исправленными» в объяснении, которое им дается, подобно тому как рассматривают отрицательные величины как «меньшие, чем ноль», и во множестве иных случаев, где язык геометра подразумевает «определенный способ образного и тайного выражения»[47]; слово «тайное» было, кажется, намёком на глубокий символический смысл геометрии, но Лейбниц имеет в виду нечто совершенно иное, и возможно здесь перед нами, как это часто у него случается, воспоминание о неких эзотерических данных, в той или иной мере плохо понятых.

Что касается смысла, в каком следует понимать, что бесконечно малые величины являются «обоснованными фикциями», Лейбниц заявляет, что «бесконечное и бесконечно малое настолько обосновано, насколько это делается в геометрии, и даже в природе, как если бы они были полностью реальными»[48]; для него на самом деле все, что существует в природе, некоторым образом подразумевает рассмотрение бесконечного или по крайней мере того, что он считает, что может назвать таковым: «совершенство анализа трансцендентных или геометрии, куда он вводит рассмотрение некоторой бесконечности, было бы несомненно более важным в силу применения, которое можно совершить к действиям природы, вводящей бесконечность во все, что она делает»[49]; но возможно это так, потому что мы не можем иметь о ней адекватного представления и потому что в ней всегда имеются элементы, которые мы не воспринимаем все отчетливо. Если это так, то не следовало бы слишком

[47] Уже цитированные воспоминания в *Acta Eruditorum*. Leipzig, 1712.

[48] Уже цитированное письмо Вариньону от 2 февраля 1702.

[49] Письмо маркизу Лопиталю. 1693.

буквально принимать такие утверждения, как например это: «Наш метод, бывший, собственно говоря, частью общей математики, рассматривающей бесконечное, — это то, в чём нуждаются, применяя математику к физике, потому что признак бесконечного Творца обычно входит в действия природы»[50]. Но если даже Лейбниц понимает под этим лишь то, что сложность природных вещей несоизмеримо превосходит границы нашего реального восприятия, то бесконечные и бесконечно малые величины должны иметь свой *fundamentum in re*; и это основание, которое обнаруживается в природе вещей, по крайней мере тем способом, каким он его понимает, есть не что иное, как то, что он называет «законом непрерывности», который нам ещё предстоит далее изучить, и который он рассматривает, ошибочно или правомерно, как в конечном счёте частный случай некоторого «закона справедливости», который сам связан с рассмотрением порядка и гармонии и который всякий раз находит своё применение, когда должна соблюдаться некоторая симметрия, как это происходит, например, при сочетаниях и перестановках.

Теперь, если бесконечные и бесконечно малые величины являются лишь фикциями, и даже допуская, что они реально «обоснованы», можно спросить следующее: зачем использовать такие выражения, которые, даже если они и могут рассматриваться как *toleranter verae*, тем не менее неправильны? Здесь есть нечто, что уже, можно сказать, предсказывает «конвенционализм» сегодняшней науки, хотя и с тем существенным различием, что последняя более нисколько не заботится о том, чтобы узнать, являются ли фикции, к которым она обращается, обоснованными или нет, или, согласно другому выражению Лейбница, могут ли они интерпретироваться *sano sensu*, и даже имеют ли они какое-то значение? Поскольку можно обойтись без этих фиктивных величин и довольствоваться рассмотрением вместо них тех

[50] Considérations sur la différente qu'il y a entre l'Analyse ordinaire et le nouveau Calcul des transcendantes //Journal des Sçavans. 1694.

величин, которые просто можно сделать сколь угодно большими или сколь угодно малыми и которые по этой причине могут быть названы неопределённо большими или неопределённо малыми, было бы, несомненно, лучше начать с этого и таким образом избежать введения фикций, которые, каким бы ни могло быть их *fundamentum in re*, не имеют в конечном счёте никакого действительного использования не только при расчетах, но также и для самого метода бесконечно малых. Выражения «неопределённо большие» и «неопределённо малые», или, что то же самое, но может быть ещё точнее, «неопределённо возрастающие» или «неопределённо уменьшающиеся», обладают не только тем преимуществом, что они — единственные, являющиеся строго точными; они ещё и ясно показывают, что величины, к которым они применимы, могут быть лишь переменными и неопределёнными величинами. Как об этом справедливо сказал один математик, «бесконечно малые — это не очень маленькие величины, имеющие актуальную ценность, доступные для определения; их признак — быть в высшей степени переменными и быть в состоянии принять меньшее значение, чем все те, которые можно уточнить; было бы гораздо лучше назвать их неопределённо малыми»[51].

Использование этих терминов помогло бы избежать множества затруднений и множества дискуссий, и в этом нет ничего удивительного, так как проблема не просто в словах, но в замене ложной идеи идеей истинной, в замене фикции реальностью; оно не позволило бы, в частности, принимать бесконечно малые величины за величины неизменные и определённые, так как слово «неопределённое» само по себе всегда предполагает идею «становления», как мы уже

[51] См.: De Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, стр. 21-22. — Автор добавляет: «Но первая апелляция (бесконечно малые) преобладает в языке, и мы считаем, что должны её сохранить». Здесь, безусловно, излишняя скрупулезность, так как использования не может быть достаточно, чтобы оправдать некорректность и непригодность языка, и если никогда не осмеливались выступить против злоупотреблений такого рода, то нельзя даже и стремиться ввести в термины больше точности и ясности, чем предполагает их обычное использование.

говорили выше, и, как следствие, изменение, или, когда речь идёт о величинах, о переменных величинах; и если бы Лейбниц обычно им пользовался, он, несомненно, не позволил бы себе так легко увлечься сравнением с песчинкой. Более того, свести *inf inite parva ad indefinite parva*было бы в любом случае более ясным, чем свести их к *ad incomparabiliter parva*; уточнение здесь только выиграло бы, точность не была бы утрачена, скорее наоборот. Бесконечно малые величины, разумеется, «несравнимы» с обычными величинами, но это можно понимать ещё и по-другому, и это действительно часто понимают в ином смысле, чем в том, в каком следовало бы; лучше сказать, что они не «подлежат точному определению», согласно другому выражению Лейбница, так как под этим термином, кажется, действительно можно было бы понимать лишь те величины, которые способны становиться насколько угодно малыми, то есть меньшими, чем любая данная величина, и которые, как следствие, нельзя «наделить» никаким определённым значением, каким бы малым оно ни было, и именно в этом и заключается на самом деле смысл *indefinite parva*. К несчастью, почти невозможно узнать, являлись ли в мышлении Лейбница выражения «несравнимое» и «не подлежащее точному определению» синонимами; но в любом случае по крайней мере верно, что собственно «не подлежащая точному определению» величина в силу возможности неопределённого возрастания, которое она предполагает, является тем самым и «несравнимой» с любой другой данной величиной и даже, если распространить эту идею на различные уровни бесконечно малых с любой величиной, по отношению к которой оно может до неопределённости возрастать, и в то же время та же самая величина рассматривается как обладающая по меньшей мере относительной неизменностью.

Если и есть пункт, с которым все могут в конечном счёте легко согласиться, даже не углубляясь в принципиальные вопросы, так это то, что понятия неопределённо малого, по крайней мере с математической точки зрения, совершенно

достаточно для анализа бесконечно малых, и даже сами «инфинитисты» без труда это признают[52]. В этом отношении можно придерживаться такого определения, как у Карно: «Что такое величина, называемая бесконечно малой в математике? Не что иное, как величина, которую можно сделать насколько угодно малой, и для этого мы не обязаны изменять те величины, соотношение которых мы ищем»[53]. Но что касается истинного значения бесконечно малых величин, вся проблема этим не ограничивается: для расчетов не имеет значения, что бесконечно малые являются лишь фикциями, поскольку можно удовлетвориться рассмотрением бесконечно малых, которые не вызывают никаких логических трудностей; и между прочим, ввиду того, что в силу метафизических доводов, которые мы изложили в начале, мы не можем допустить количественную бесконечность как бесконечность больших величин, так и бесконечность величин малых[54], а также бесконечность какого-либо относительного и определённого порядка, мы можем быть уверены, что они могут быть на самом деле только фикциями и ничем иным; но если эти фикции были введены ошибочно или верно, с самого начала исчисления бесконечно малых, то по замыслу Лейбница они должны были чему-то по меньшей мере соответствовать, каким бы искажённым ни был способ, ка-

[52] См., в частности, Л. Кутура «О математической бесконечности», стр. 265, примечание: «Можно логически обосновать исчисление бесконечно малых одним лишь понятием неопределённого...» — правда, использование слова «логически» подразумевает здесь оговорку, так как для автора оно противопоставляется слову «рационально», что, впрочем, представляет собой довольно странную терминологию; к этому мнению всё же было бы интересно вернуться.

[53] «Рассуждения о метафизике исчисления бесконечно малых», стр. 7, примечание; см. там же, стр. 20. Заглавие этого труда едва ли оправдано, так как в действительности там не обнаруживается ни малейшей идеи метафизического уровня.

[54] Весьма знаменитая концепция «двух бесконечностей» Паскаля метафизически абсурдна, и она является также результатом смешения бесконечного с неопределённым, которое при этом взято в двух противоположных смыслах величин возрастающих и уменьшающихся.

ким они это выражали. Поскольку здесь мы занимаемся принципами, а не процедурой расчета, сведенного в каком-то отношении к себе самому, что было бы нам неинтересно, мы должны, следовательно, задать вопрос, каково в точности значение этих фикций не только с логической точки зрения, но ещё и с точки зрения онтологической, если они настолько «обоснованы», как полагает Лейбниц, и если даже мы можем вместе с ним сказать, что они являются *toleranter verae*, и принять их в качестве таковых, *modo sano sensu intelligantur*, чтобы ответить на эти вопросы, нам придется тщательно изучить его концепцию «закона непрерывности», поскольку именно в нём он считает, что обнаруживает *fundamentum in re* бесконечно малых.

Глава VII. «Степени бесконечности»

Мы ещё не имели возможности увидеть во всем предшествующем все смешения, неизбежно возникающие, когда допускают идею бесконечного в значениях, отличных от его единственного истинного и, собственного говоря, метафизического смысла; не один пример такого смешения обнаруживается, в частности, в той долгой дискуссии, которую имел Лейбниц с Жаном Бернулли по поводу реальности бесконечных и бесконечно малых величин, дискуссии, которая, впрочем, так и не пришла к какому-либо окончательному заключению и которая и не могла к нему прийти в силу той путаницы, допускаемой в каждое мгновение как одним, так и другим, и в силу отсутствия принципов, которые эту путаницу порождали; впрочем, на каком бы уровне идей это ни происходило, всегда в конечном счёте именно отсутствие принципов делает вопросы неразрешимыми. Можно, помимо всего прочего, удивляться, что Лейбниц делал различие между «бесконечным» и «незавершенным», и что поэтому он безусловным образом не отвергал идею, очевидно противоречивую, «завершенного бесконечного», доходя даже до вопроса «возможно ли, что существует, например, бесконечная и тем не менее завершенная и с той и с другой стороны прямая линия»[55]. Разумеется, он пренебрежительно отвергает такую возможность, «тем более, что мне кажется, — говорит он, — что бесконечное, взятое в строгом смысле, должно иметь свой исток в незавершенном, без чего я не вижу средства найти основание, способное отличить его от конечного»[56]. Но даже если говорят более утвердительным образом,

[55] Письмо Жану Бернулли от 18 ноября 1698 г.

[56] Уже цитированное письмо Вариньону от 2 февраля 1702 г.

чем это делает он, что «бесконечное имеет свой исток в незавершенном», то именно потому, что оно ещё не рассматривается как абсолютно ему идентичное, оно от него в какой-то мере отличается; и в той мере, в какой это так, мы рискуем оказаться в плену у сонма странных и противоречивых идей. Эти идеи, как заявляет Лейбниц, он не принимает добровольно, и было бы необходимо, чтобы он был «принужден к этому неоспоримыми доказательствами»; но он уже вполне серьёзно приписывает им определённое значение и даже может рассматривать их иначе, чем как просто невозможные; что, например, касается идеи вроде «завершенной вечности», которая имеется среди тех, что он выражает в этой связи, мы можем видеть в ней лишь продукт смешения между понятием вечности и понятием длительности, что абсолютно необоснованно с точки зрения метафизики. Мы вполне допускаем, что время, в котором протекает наша телесная жизнь, действительно является неопределённым, что никоим образом не исключает, что оно является «завершенным и с той и с другой стороны», то есть что оно имеет одновременно и начало и конец, в соответствии с традиционной циклической концепцией; мы допускаем также, что существуют другие модальности длительности наподобие той, что схоласты называли *aevum*, неопределённость которого является, если можно так выразиться, более неопределённой, чем неопределённость этого времени; но все эти модальности во всей их возможной широте являются тем не менее только неопределёнными, поскольку речь всегда идёт о частных условиях бытия, свойственных тому или иному состоянию, и ни одна из них в силу того, что она является длительностью, то есть подразумевает последовательность, не может быть отождествлена или уподоблена вечности, с которой реально она имеет не больше связей, чем конечное в любом его виде имеет с истинным бесконечным, так как концепция относительной вечности имеет не больше смысла, чем концепция относительной бесконечности. Во всём этом уместно видеть лишь различные уровни

неопределённости, как мы это ещё увидим впоследствии; но Лейбниц, неспособный сделать необходимые и существенные различия, неспособный прежде всего установить принцип, который один лишь позволил бы ему никогда не заблуждаться, оказывается в весьма затруднительном положении, опровергая Бернулли, который считает его даже — настолько его ответы были двусмысленными и нерешительными — менее отдалившимся, чем это было в реальности, от его же собственных идей «бесконечности миров» и различных «степеней бесконечности».

Такая концепция мнимых «степеней бесконечности» означает в конечном счёте предположение, что могут существовать миры, несравнимо более великие и более малые, чем наш, причём соответствующие части каждого из них сохраняют между собой эквивалентные пропорции, и поэтому обитатели какого-либо одного из этих миров могут рассматривать его как бесконечный с тем же основанием, что и мы рассматриваем как бесконечный наш мир; мы бы сказали даже, что у нас оснований меньше. Такой способ рассматривать вещи не имел бы *a priori* ничего абсурдного без введения идеи бесконечного, которая, разумеется, здесь не усматривается: не является ли каждый из этих миров, каким бы большим он ни предполагался, всё же ограниченным, и тогда как можно назвать его бесконечным? Истина в том, что ни один из них не может быть бесконечным в действительности, и только потому, что они мыслятся как множественные, так как мы здесь возвращаемся к противоречию множества бесконечностей; и если некоторым, даже многим, и приходится рассматривать наш мир как один из миров, тем не менее истинно, что такое утверждение не может дать нам никакого приемлемого смысла. Впрочем, можно задать вопрос, являются ли эти миры различными или же они, скорее, представляют собой лишь в той или иной мере протяженные части одного и того же мира, поскольку, согласно гипотезе, они должны быть все подчинены одним и тем же условиям бытия и особенно условию в виде пространства,

раскрывающегося просто либо в увеличенном либо в уменьшенном масштабе. В любом ином смысле, нежели этот, можно в действительности говорить не о бесконечности, но о неопределённости миров, и только потому, что за пределами условий бытия, таких как пространство и время, которые присущи нашему миру, рассматриваемому во всей широте, на которую он способен, есть неопределённое количество других равно возможных миров; мир, то есть в конечном счёте состояние бытия, определяется, таким образом, совокупностью условий, которым он подчинен; но уже в силу того, что он будет всегда обусловлен, то есть определен и ограничен, и поскольку он не включает в себя все возможности, его никогда будет нельзя рассматривать как бесконечный, но только как неопределённый[57].

В сущности, рассмотрение миров в том смысле, в каком это понимает Бернулли, несравнимо более великих и более малых по отношению друг к другу, не отличается чрезвычайно от того, к которому обращается Лейбниц, когда он рассматривает «небесный свод по отношению к земле, а землю по отношению к песчинке», а последнюю по отношению «к частице магнетической материи, которая проходит сквозь стекло». Однако Лейбниц не имеет здесь намерения говорить о *gradus infinitatis* в собственном смысле; он, напротив, даже намерен доказать тем самым, что «нет нужды здесь брать бесконечное в строгом смысле», и он ограничивается рассмотрением «несравнимого», против чего невозможны никакие логические возражения. Недостаток его сравнения относится к совершенно иному порядку, и он заключается, как мы уже говорили, в том, что оно может дать лишь неточное представление, даже абсолютное неверное, о бесконечно малых величинах, какими они вводятся в расчёты. Мы ещё будем впоследствии иметь возможность заменить это рассмотрение выводами о множестве истинных степеней неопределённости, взятых как в возрастающем по-

[57] См. «Множественные состояния существа».

рядке, так и в порядке уменьшающемся; в данный момент мы больше не будем на этом задерживаться.

В конечном счёте различие между Бернулли и Лейбницем заключается в том, что для первого речь действительно идёт о «степенях бесконечности», хотя он и наделяет их лишь предположительной вероятностью, тогда как второй, сомневаясь в их вероятности и даже в их возможности, ограничивается заменой их тем, что можно было бы назвать «степенями несравнимости». Исходящая из этого различия, впрочем, весьма важного, концепция ряда миров, сходных между собой, но в различных масштабах является для них общей; эта концепция не лишена некоторой связи, по меньшей мере случайной, с открытиями, вызванными использованием микроскопа в ту же эпоху, и с некоторыми воззрениями, которые они тогда вызвали к жизни, но которые ни в коей мере не были подтверждены дальнейшими наблюдениями, как например теория «соединения зародышей»: неверно, что в зародыше живое существо было актуально и телесно «предварительно сформированное» во всех своих частях, и организация клетки не имела никакого сходства с организацией всего тела, элементом которого она является. Что касается по крайней мере Бернулли, не вызывает сомнений, что это фактически и было происхождением его концепции; он на самом деле говорит, помимо иных весьма значительных в этом отношении вещей, что частицы тела сосуществуют в целом, «как, согласно Гарвею и другим, но вопреки Левенгуку, в животном имеются бесчисленные яйцеклетки, в каждой яйцеклетке имеется одна или множество анималкул, в каждой анималкуле также бесчисленные яйцеклетки, и так до бесконечности»[58]. [59] Что касается Лейбница, то у него на самом деле исходным пунктом является нечто совершенно иное: так, идея, что все звезды, которые мы видим, могут быть лишь элементами несравненно более

[58] Письмо от 23 июля 1608 г.

[59] См.: «Царь мира», «Символизм креста». М., 2004.

великого существа, идея напоминает нам концепцию «великого человека» Каббалы, но странным образом материализованную и перенесенную в пространство в силу какого-то неведения истинного аналогического значения традиционного символизма; точно так же и идея «животного», то есть живого существа, существующего телесно после смерти, но «сведенного к миниатюре», очевидно, инспирирована концепцией луз или «ядра бессмертия» согласно иудейской традиции,2 концепцией, которую Лейбниц в равной мере искажает, связывая её с концепцией миров, несравнимо более малых, чем наш, так как, говорит он, «ничто не мешает тому, чтобы животные, умирая, переносились бы в такие миры; я на самом деле думаю, что смерть есть не что иное, как сокращение, сжатие животного, так же как зарождение есть не что иное, как эволюция»[60], причём это последнее слово взято здесь в своем этимологическом значении «развития». Всё это, по сути дела, лишь пример опасности, которую представляет собой желание согласовать традиционные понятия с воззрениями профанной науки, что можно сделать лишь в ущерб первым; они, разумеется, совершенно независимы от теорий, вызванных наблюдениями в микроскоп, и Лейбниц, сближая и смешивая и те и другие, действовал уже так, как должны были позже действовать оккультисты, которым особенно нравились такие неоправданные сближения. С другой стороны, наложение друг на друга «несравнимых» величин различного порядка казалось ему соответствующим его концепции «наилучшего из миров», как предоставляющей средство разместить там, согласно определению, которое он ему дает, «столько существования и реальности, сколько возможно»; и эта идея «наилучшего из миров» также происходит из иных плохо примененных традиционных сведений, заимствованных из символической геометрии пифагорейцев, как мы уже указывали

[60] Уже цитированное письмо Жану Бернулли от 18 ноября 1698 г.

в ином месте[61]: окружность является из всех линий равной длины той, что охватывает максимальную поверхность, и также сфера представляет собой из всех тел с равной поверхностью телом, которое содержит максимальный объем, и это одна из причин, по которым эти фигуры рассматривались как самые совершенные; но, если в этом отношении имеется максимум, то нет минимума, то есть не существует фигур, включающих в себя поверхность или объем, меньший, чем все остальные, и именно поэтому Лейбниц был вынужден считать, что если есть «наилучший из миров», то нет «худшего из миров», то есть мира, содержащего в себе меньше существования, чем любой другой возможный мир. Известно, впрочем, что именно с этой концепцией «наилучшего из миров», в то же время, как и с концепцией «несравнимых» величин, связываются те прекрасно известные сравнения «сада, заполненного растениями», и «пруда, наполненного рыбами», где «каждая ветвь растения, каждый член животного, каждая капля его соков есть опять такой же сад или такой же пруд»[62]; и это естественным образом вынуждает нас затронуть другой, связанный с этим вопрос, который является вопросом о «делимости материи до бесконечности».

---

[61] «Множественные состояния существа». Глава II // Волшебная гора. 2007. № XIV.

[62] Лейбниц Г. В. Ф. «Монадология» // Лейбниц Г. В. Ф. Соч. В 4-х т. Т. 1, стр. 413-429.

Глава VIII. «Деление до бесконечности» или неопределённая делимость

Для Лейбница материя не только делима, но «действительно подразделена без конца» во всех своих частях, «каждая часть на части, из которых каждая имеет своё собственное движение»[63]; и на таком видении он настаивает, чтобы теоретически поддержать концепцию, изложенную нами в последнюю очередь: «Из действительного деления следует, что в одной части материи, какой бы малой она ни была, имеется что-то вроде мира, состоящего из бесчисленных созданий»[64]. Бернулли также допускает такое деление материи *in partes numero infinitas*, но он извлекает из этого следствия, которые Лейбниц не принимает: «Если конечное тело, — говорит он, — имеет бесконечное число частей, то я всегда считал и ещё считаю, что самая малая из этих частей должна иметь с целым связь, не подлежащую измерению, или бесконечно малую»[65]; на что Лейбниц отвечает: «Даже если согласиться, что нет ни одной части материи, которая не была бы действительно делима, мы тем не менее не дойдем до неделимых элементов или до частей, меньших, чем все остальные, или до бесконечно малых, но только до частей, всегда ещё меньших, которые всё же являются обычными величинами, а при увеличении мы дойдем до величин, всегда ещё больших»[66]. Следовательно, именно существование *minimae portiones*, или «последних элементов» Лейбниц и оспаривает; наоборот, для Бернулли кажется яс-

---

[63] Лейбниц Г. В. Ф. Монадология. Т. 1, стр. 413-429.

[64] Письмо Жану Бернулли от 12-22 июля 1698 г.

[65] Уже цитированное письмо от 23 июля 1698 г.

[66] Письмо от 29 июля 1698 г.

ным, что действительное деление подразумевает одновременное существование всех элементов подобно тому, как если дан «бесконечный» ряд, то все члены, которые его образуют, должны быть даны одновременно, что подразумевает существование *terminus infinitesimus*. Но для Лейбница существование такого члена является не менее противоречивым, чем существование «бесконечного числа», а понятие самого малого из чисел, или *fractio omnium infima* — не менее, чем понятие самого большого из чисел; то, что он рассматривает как «бесконечность» ряда, характеризуется невозможностью дойти до последнего члена, и также и материя не могла бы делиться до «бесконечности», если такое деление могло бы когда-нибудь завершиться и дойти до «последних элементов»; и дело не только в том, что мы не сможем фактически дойти до этих последних элементов, как допускает Бернулли, но в том, что они не должны существовать в природе. Нет далее неделимых телесных элементов, или «атомов» в собственном смысле слова, как нет в порядке чисел неделимой дроби, которая не могла бы породить всегда ещё более малые дроби, или как нет в геометрическом порядке линейного элемента, который нельзя было бы разделить на более малые элементы.

По сути дела, смысл, в котором здесь везде Лейбниц принимает «бесконечное», — это именно тот смысл, в котором он говорит, как мы видели, о «бесконечном множестве»: для него говорить о каком-либо ряде, так же как и о последовательности целых чисел, которая является бесконечной, значит говорить не то, что она должна завершиться *terminus infinitesimus* или «бесконечным числом», но наоборот, что она не должна обладать последним членом, потому что члены, которые она в себя включает, являются *plus quam numero designari possint* или создающими множество, которое превосходит любое число. Кроме того, если можно сказать, что материя делима до бесконечности, то потому, что любая из её частей, какой бы малой она ни была, всегда охватывает собой какое-то множество; другими словами, материя не об-

ладает *partes minimae* или простыми элементами, она, в сущности, есть нечто сложное, составное: «Верно, что простые субстанции, то есть которые не являются сложными, действительно являются неделимыми, но они нематериальны и представляют собой лишь принципы действия»[67]. Именно в смысле неисчислимого множества, которое, впрочем, является самым обыкновенным у Лейбница, идея так называемого бесконечного и может применять к материи, к геометрической протяженности и вообще к непрерывному, рассматриваемому в связи с его составом; кроме того, этот смысл не свойствен исключительно *infinitum continuum*, он распространяется также и на *infinitum discretum*, как мы видели в примере с множеством всех чисел и с «бесконечными рядами». Именно поэтому Лейбниц мог сказать, что величина бесконечна в том, что в ней есть «неисчерпаемого», из чего следует, что «всегда можно взять насколько угодно малую величину»; и «остается истинным, например, что 2 — это столько же, сколько 1/1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ... и т. д., что является бесконечным рядом, в котором все дроби, числители которых равны 1, а знаменатели — членам двойной геометрической прогрессии, взятым одновременно, при условии, что мы используем всегда лишь обычные числа и что нам не приходится вводить никакой бесконечно малой дроби или той, знаменатель которой был бы бесконечным числом»[68]. Кроме того, только что сказанное позволяет понять, как Лейбниц, утверждая, что бесконечное в том смысле, в каком он его понимал, не является целым, мог тем не менее применять эту идею к непрерывному: в своей совокупности непрерывное подобно какому-либо телу образует целое, и даже то, что мы называли выше истинным целым, логически предшествующим своим частям и независимым от них, но оно, очевидно, всегда как таковое конечно; следовательно, не в связи с целым Лейбниц может говорить

---

[67] Письмо Вариньону от 20 июня 1702 г.

[68] Уже цитированное письмо Вариньону от 2 февраля 1702 г.

о бесконечном, но только в связи с частями, на которые оно разделено или может быть разделено, и в той мере, в какой множество этих частей действительно превосходит всякое допускающее точное определение число: это то, что можно назвать аналитической концепцией бесконечного, вызванной тем, что на самом деле лишь аналитически множество, о котором идёт речь, неисчерпаемо, как мы это далее объясним.

Если теперь мы спросим, чего стоит идея «деления до бесконечности», то необходимо признать, что, как и идея «бесконечного множества», она содержит в себе некоторую часть истины, а также что способ, каким она выражена, далеко не защищен от любого вида критики: прежде всего само собой разумеется, согласно тому, что до сих пор излагали, не может быть и речи о каком-либо делении до бесконечности, но только о неопределённом делении; с другой стороны, следует применять эту идею не к материи вообще, что, возможно, не имеет никакого смысла, но только к телам или к телесной материи, если оставаться здесь в рамках рассуждений о «материи», несмотря на крайнюю темноту этого понятия и множественные двусмысленности, которым она даёт место[69]. На самом деле именно протяженности, а не материи, в каком бы значении её ни понимать, и принадлежит, собственно говоря, делимость, и здесь можно смешивать и то и другое лишь при условии, что мы принимаем картезианскую концепцию, которая, в сущности, связывает природу тел исключительно с протяженностью, концепцию, которую, между прочим, сам Лейбниц уже не принимал; если, следовательно, любое тело неизбежно делимо, то потому, что оно протяженно, а не потому, что оно материально. Напомним также, что протяженность, будучи чем-то определённым, не может быть бесконечной и, в силу этого, она, очевидно, не может подразумевать никакой возможности, которая была бы бесконечной в большей мере, чем является она сама; но

[69] См.: «Царство количества и знамения времени».

поскольку делимость — это качество, внутренне свойственное природе протяженности, её ограниченность может исходить лишь из самой этой природы: поскольку имеется протяженность, эта протяженность всегда делима, и поэтому можно рассматривать эту делимость как реально неопределённую, причём эта неопределённость будет обусловлена неопределённостью протяженности. Как следствие, протяженность как таковая не может быть составлена из неделимых элементов, так как эти элементы, чтобы быть действительно неделимыми, должны быть непротяженными, а сумма непротяженных элементов никогда не сможет образовать протяженность, так же, как сумма нулей не может образовать число; именно поэтому, как мы объяснили в ином месте[70], точки не являются элементами или частями линии, а истинными линейными элементами всегда являются расстояния между точками, которые представляют собой лишь их края. Между прочим, таким образом сам Лейбниц и рассматривал данный вопрос, и то, что, согласно ему, как раз и составляет фундаментальное различие между его методом бесконечно малых и «методом неделимых» Кавальери, так это тот факт, что он не рассматривает ни линию, как состоящую из точек, ни поверхность как состоящую из линий, ни объем как состоящий из поверхностей: точки, линии и поверхности здесь лишь пределы или крайности, а не образующие элементы. Очевидно, на самом деле, что точки, умноженные на какую бы то ни было величину, никогда не смогут произвести длину, поскольку, строго говоря, они равны нулю по отношению к длине; истинные элементы величины должны всегда быть той же природы, что и сама величина, пусть даже и несравнимо меньшими: как раз это и не имеет места в случае с «неделимыми», а с другой стороны, именно это позволяет соблюдать в исчислении бесконечно малых определенный закон однородности, который предполагает, что обычные величины и бесконечно малые величи-

[70] «Символизм креста». Глава XVI.

ны различных порядков являются тем не менее величинами одного и того же вида.

С этой точки зрения можно ещё сказать, что часть, какой бы она ни была, должна всегда сохранять определённую «однородность» с целым или соответствие его природе, по крайней мере поскольку это целое рассматривается как способное к восстановлению посредством его частей способом, сравнимым с тем, что служит образованию арифметической суммы. Это, впрочем, не означает, что в реальности нет ничего простого, так как сложное может быть сформировано на основе элементов совершенно иным способом нежели этот; но тогда, правда, эти элементы не являются, собственно говоря, «частями» и, как это признает Лейбниц, они ни в коей мере не могут быть элементами телесного порядка. в чём можно на самом деле быть уверенным, так это в том, что нельзя дойти до простых, то есть неделимых элементов, не выйдя за пределы того особого условия, каким является протяженность, и поэтому протяженность не может быть разложена на такие элементы, не перестав быть протяженностью. Из этого непосредственно следует, что не могут существовать неделимые телесные элементы, и что такое понятие подразумевает противоречие; на самом деле, подобные элементы должны быть непротяженными, и тогда они уже не будут телесными, так как в силу самого определения тот, кто говорит о телесном, неизбежно говорит о протяженном, хотя, между прочим, дело и не обстоит так со всей природой вещей; и таким образом, несмотря на все оговорки, которые мы должны сделать, Лейбниц по крайней мере полностью прав в своем споре с атомизмом.

Однако до сих пор мы говорили только о делимости, то есть о возможности деления; следует ли идти далее и допустить вместе с Лейбницем «действительное деление»? Эта идея ещё не свободна от противоречий, так как она означает предположение полностью реализованного деления и тем самым противоречит самой природе бесконечного, которая, как мы об этом говорили, всегда является возмож-

ностью дальнейшего развития, то есть подразумевает, в сущности, нечто незавершенное, нечто ещё полностью нереализованное. Впрочем, на самом деле нет никаких оснований делать такое предположение, так как, когда перед нами совокупность непрерывного, то это целое, которое нам дано, но части, на которые оно может быть разделено, нам не даны, и мы только представляем, что нам можно разделить это целое на части, которые могут оказываться все более и более малыми, становясь таким образом меньшими, чем любая данная величина, если деление заходит слишком далеко; фактически именно мы и наделяем реальностью эти части по мере того, как осуществляем такое деление. Таким образом, от предположения о «действительном делении» нас избавляет различие, которое мы ранее установили относительно разных способов, какими может рассматриваться целое: совокупность непрерывного не является результатом сложения частей, на которые оно делимо, но, наоборот, от них независима и, как следствие, тот факт, что эта совокупность дана нам как целое, ни в коей мере не предполагает действительного существования этих частей.

Кроме того, с иной точки зрения, и переходя к рассмотрению дискретного, мы можем сказать, что если неопределённый числовой ряд нам дан, это никоим образом не подразумевает, что все члены, которые он в себя включает, даны нам раздельно, что настолько же невозможно, насколько он является неопределённым; в действительности задавать такой ряд — значит просто задавать закон, который позволяет

рассчитать член, занимающий в ряду определённое место[71]. Если бы Лейбниц дал такой ответ Бернулли, их дискуссия о существовании *terminus infinitesimus* сразу же тем самым и завершилась; но он не смог бы ответить таким образом, не придя логически к отрицанию своей идеи «действительного деления» и не отрицая всякую связь между непрерывной модальностью количества и его дискретной модальностью.

Как бы то ни было, что касается по меньшей мере непрерывного, то как раз в «неразличимости» частей мы и можем увидеть корень идеи бесконечного, как её понимает Лейбниц, поскольку, как мы уже сказали выше, эта идея всегда у него содержит некоторую долю путаницы; но такая «неразличимость», вместо того чтобы предполагать осуществляемое деление, склонялась бы, наоборот, к её исключению даже при отсутствии имеющих решающее значение оснований, на которые мы только что указали. Следовательно, если теория Лейбница верна в той мере, в какой она противостоит атомизму, то следует, для того чтобы она соответствовала истине, её исправить, заменив «деление материи до бесконечности» «неопределённой делимостью протяженности»: это в его наиболее краткой и наиболее точной форме тот результат, к которому окончательно приводят все только что изложенные нами рассуждения. Как раз благодаря закону образования натуральной последовательности мы

[71] См.: Кутюра Л. «О математической бесконечности», стр. 467: «Натуральная последовательность чисел полностью задаётся законом её образования, так же, между прочим, как и все иные последовательности и бесконечные ряды, где формулы возобновления, вообще говоря, достаточно, чтобы полностью определить их таким образом, что их предел или их сумма (когда она существует) оказываются тем самым полностью определёнными... Как раз благодаря закону образования натуральной последовательности мы и обладаем идеей всех целых чисел, в том смысле, что они даны полностью в этом законе». — Можно на самом деле сказать, что общая формула, выражающая член *n* ряда, содержит потенциально и имплицитно, но не актуально и раздельно, все члены этого ряда, поскольку можно получить какой-то один из них, придав *n* значение, соответствующее тому месту, которое этот член должен занимать в ряду; но, вопреки тому, что думает Л. Кутюра, разумеется, вовсе не это желал сказать Лейбниц, «когда он поддерживал действительную бесконечность натуральной последовательности чисел».

и обладаем идеей всех целых чисел в том смысле, что они даны полностью в этом законе.

Глава IX. Неопределенно возрастающее и неопределённо уменьшающееся

Прежде чем продолжить изучение вопросов, относящихся собственно к непрерывному, мы должны вернуться к тому, что говорили выше о несуществовании *fractio omnium infima*, что нам позволит увидеть, как соответствие или симметрия, существующая в некоторых отношениях между неопределённо возрастающими величинами и величинами, неопределённо уменьшающимися, может быть изображена в числах. Мы видели, что в области дискретных величин, пока их рассматривают лишь как последовательность целых чисел, эти числа должны рассматриваться как неопределённо возрастающие от единицы, но поскольку единица в сущности неделима, то и речи не может быть о неопределённо уменьшающихся; если взять числа в уменьшающемся направлении, то мы неизбежно оказались бы остановившимися на самой единице, и поэтому изображение неопределённого посредством чисел ограничено в одном направлении — в направлении неопределённо возрастающего. Наоборот, когда речь идёт о непрерывных величинах, можно рассматривать как неопределённо возрастающие величины, так и неопределённо уменьшающиеся; и то же самое происходит с самими дискретными величинами, как только, чтобы передать эту возможность, туда вводится рассмотрение дробных чисел. Действительно, можно рассматривать последовательность дробей, идущих в неопределённо уменьшающемся направлении, то есть какой бы маленькой ни была дробь, всегда можно образовать ещё более маленькую, и такое уменьшение никогда не сможет завершиться *fractio minima*, так же как возрастание целых чисел не сможет завершиться *numerus maximus*.

Чтобы сделать очевидным посредством изображения в числах соответствие неопределённо возрастающего и неопределённо уменьшающегося, достаточно рассмотреть одновременно с последовательностью целых чисел последовательность чисел, им обратных: число называется обратным другому, когда его произведение на это первое число равно единице, и по этой причине число, обратное п, изображается обозначением 1*/n*. В то время как последовательность целых чисел идёт от единицы в неопределённо возрастающем направлении, последовательность обратных чисел идёт в неопределённо уменьшающемся направлении от той же самой единицы, которая является числом, обратным себе самому, и которая поэтому есть точка отсчёта, общая для двух рядов; каждому числу одной из последовательностей, соответствует одно число из другой, и наоборот, так что эти две последовательности являются одинаково неопределёнными, и они являются неопределёнными одним и тем же способом, хотя и в обратном направлении. Число, обратное какому-то числу, очевидно, является настолько же меньшим, насколько само это число велико, поскольку их произведение всегда остается постоянным; каким бы большим ни было число N, число N + 1 будет ещё больше в силу самого закона образования неопределённого ряда целых чисел, и точно так же, каким бы малым ни было число 1/N, число 1/(N+1) уменьшается. Следовательно, уместно, когда непрерывные величины рассматриваются как способные становиться насколько угодно большими и насколько угодно малыми, то есть большими и меньшими, чем любая определённая величина, всегда соблюдать симметрию и, можно в каком-то отношении сказать, параллелизм, который представляют собой эти две обратные друг другу переменные; это замечание поможет нам лучше понять впоследствии возможность различных порядков бесконечно малых величин.

Справедливо будет заметить, что хотя символ *1/n* напоминает об идее дробных чисел и что на деле он от них и берёт

своё начало, тем не менее необходимо, чтобы числа, обратные целым числам, были бы здесь определены, и это необходимо для того, чтобы избежать неудобства, которое представляет собой обычное понятие дробных чисел с собственно арифметической точки зрения, то есть концепция дробей как «частей единицы». На самом деле достаточно рассматривать два ряда как образованные соответственно числами большими или меньшими, чем единица, то есть как два порядка величин, которые имеют в ней свой общий предел, и в то же время и тот и другой могут также рассматриваться как исходящие из этой единицы, которая на самом деле является первичным истоком всех чисел; кроме того, если мы желаем рассматривать эти две неопределённые совокупности, как образующие одну-единственную последовательность, то можно сказать, что единица занимает как раз середину в этой последовательности чисел, поскольку, как мы видели, в одной из этих совокупностей имеется ровно столько же чисел, сколько и в другой. С другой стороны, если бы мы желали с целью ещё больше обобщить, ввести, собственно говоря, дробные числа, вместо того чтобы рассматривать ряд целых чисел и ряд чисел, им обратных, то ничто не изменилось бы в отношении симметрии возрастающих и убывающих величин; с одной стороны, у нас были бы числа, большие, чем единица, а с другой — все числа, меньшие, чем единица; здесь также любому числу $a/b > 1$ соответствует в другой группе число $b/a < 1$, и наоборот, таким образом, что $a/b \times b/a = 1$, так же как это было в случае с $n \times 1/n = 1$, и таким образом всегда будет одно и то же количество чисел и в той и в другой из этих двух неопределённых групп, разделенных единицей; должно, впрочем, быть понятно, что когда мы говорим «столько же чисел», это означает, что имеются два множества, все члены которых соответствуют друг другу, но сами эти множества ни в коей мере не могут рассматриваться как «исчислимые». В любом случае сумма двух обратных чисел, умноженных друг на друга, всегда порождает единицу, из которой они и происходят; можно так-

же сказать, что единица, занимающая середину между двумя группами и являющаяся единственным числом, которое может рассматриваться как принадлежащее одновременно и той и другой[72], хотя на самом деле более точно было бы сказать, что она их скорее объединяет, чем разделяет, — эта единица соответствует состоянию совершенного равновесия — и что она содержит в себе самой все числа, которые исходят из неё парами обратных друг другу или друг друга дополняющих чисел; каждая из этих пар образует в силу этой взаимодополнительности относительную единицу в своей неразделимой двойственности; [73] но мы чуть позже вернёмся к этому последнему доводу и к тем следствиям, которые он подразумевает.

Вместо того чтобы утверждать, что ряд целых чисел является неопределённо возрастающим, а ряд обратных им чисел неопределённо уменьшающимся, можно также говорить в том же самом смысле, что числа стремятся, с одной стороны, к неопределённо большому, а с другой — к неопределённо малому при условии, что мы понимаем под этим сами пределы области, в которой эти числа рассматриваются, так как переменная величина может стремиться только к пределу. Область, о которой идёт речь, является в конечном счёте областью числовой величины, рассматриваемой во всей ши-

---

[72] Согласно определению обратных чисел единица изображается, с одной стороны, в форме 1, а с другой — в форме 1/1, так что 1 × 1/1 = 1; но, поскольку, с другой стороны, 1/1 = 1, это одна и та же единица, которая рассматривается в двух различных формах и которая, следовательно, как мы выше говорили, сама является себе обратной.

[73] Мы говорим неразделимой, потому что, если одно из этих двух чисел, образующих такую пару, существует, то тем самым неизбежно существует и другое.

роте, на которую она способна[74]; это также означает, что пределы определяются не тем или иным частным числом, каким бы большим или каким бы малым оно ни предполагалось, но самой природой числа как такового. Именно поэтому число, как и любая иная вещь определённой природы, исключает всё то, что им не является, и здесь и речи быть не может о бесконечности; впрочем, мы только что говорили, что неопределённо большое должно неизбежно мыслиться как предел, хотя оно ни в коей мере не является *terminus ultimus* ряда чисел, и можно по этому поводу заметить, что выражение «стремиться к бесконечности», часто используемое математиками в смысле «возрастать до неопределённости», также является абсурдным, поскольку бесконечное, очевидно, подразумевает отсутствие любого предела, и что, следовательно, здесь нет ничего, к чему можно было бы стремиться. Также довольно странно, что некоторые, полностью признавая некорректность и излишний характер выражения «стремиться к бесконечности», не испытывают, с другой стороны, никаких сомнений, принимая выражение «стремиться к нулю» в смысле «уменьшаться до неопределённости»; тем не менее нуль, или «нулевая величина», в точности симметрична по отношению к уменьшающимся величинам тому, чем является мнимая «бесконечная величина» по отношению к возрастающим величинам; но нам впоследствии ещё предстоит вернуться к вопросам, которые, в частности, возникают по поводу нуля и его различных значений.

Поскольку последовательность чисел в своей совокупности не «завершается» определённым числом, из этого следует, что нет числа, каким бы большим оно ни было, которое

---

[74] Само собой разумеется, что несоизмеримые числа в отношении величины неизбежно размещаются между обычными числами, целыми или дробными в зависимости от того, являются ли они большими или меньшими, чем единица; именно это и доказывает, между прочим, геометрическое соответствие, на которое мы ранее указывали, а также возможность определить такое число двумя совпадающими совокупностями соизмеримых чисел, для которых оно является общим пределом.

могло бы быть отождествлено с неопределённо большим в том смысле, в каком мы его понимаем; и, разумеется, то же самое также истинно и для того, чем является неопределённо малое. Можно лишь рассматривать число как практически неопределённое, если позволительно так выразиться, когда его уже нельзя ни выразить в языке, ни изобразить письменно, что фактически неизбежно и происходит в данный момент, когда рассматриваются числа, всегда возрастающие или всегда уменьшающиеся; здесь, если угодно, вопрос просто «видения», но само это соответствует в итоге характеру неопределённости в той мере, в какой она в конечном счёте есть не что иное, как то, чьи пределы могут быть не устранены, поскольку это противоречило бы самой природе вещей, но просто отодвинуты до такой степени, что они полностью теряются из виду. В связи с этим было бы уместно поставить некоторые довольно любопытные вопросы: так, можно было бы спросить, почему китайский язык символически изображает неопределённое числом десять тысяч; выражение «десять тысяч существ» означает, например, всех существ, которые реально имеются в неопределённом или «неисчислимом» множестве. Весьма замечательно, что в точности то же самое происходит также и в греческом языке, где одно-единственное слово с простым различием в диакритике, которое, очевидно, является совершенно второстепенной деталью и которое, несомненно, вызвано лишь потребностью различить использование двух значений, служит в равной мере выражению одновременно и той, и другой идеи: μύριοι, десять тысяч; μυρίοι, неопределённое. Истинная причина этого факта в следующем: это число десять тысяч есть четвёртая степень десяти; следуя формуле Дао дэ цзин, «одно порождает два, два порождает три, три порождает все числа», что подразумевает, что четыре, непосредственно порожденное числом три, некоторым образом равно всей совокупности чисел, и это так, потому что как только мы получаем четверицу, то получаем также посредством добавления четырёх первых чисел, и десятерицу, которая

изображает полный числовой цикл: 1 + 2 + 3 + 4 = 10; это, как мы уже говорили по другому поводу, и есть пифагорейский Тетраксис. Можно также добавить, что такое изображение числовой неопределённости имеет своё соответствие в пространственном порядке: известно, что возведение в высшую степень представляет собой на этом уровне добавление одного измерения; наше пространство, имеет лишь три измерения; его границы преодолеваются, когда выходим за пределы третьей степени, что, иными словами, означает, что возведение в четвёртую степень знаменует саму границу его неопределённости, поскольку, как только оно осуществляется, мы тем самым выходим из этого пространства и переходим на другой уровень возможностей.

Глава X. Бесконечное и непрерывное

Идея бесконечности, как её чаще всего понимает Лейбниц, и которая, что никогда нельзя упускать из виду, является лишь идеей множества, которое превосходит любое число, изображается иногда в аспекте «дискретной бесконечности», как в случае числовых рядов, называемых бесконечными; но самый её обычный аспект, а также самый важный в том, что касается значения исчисления бесконечно малых, — это аспект «непрерывной бесконечности». Необходимо по этому поводу напомнить, что когда Лейбниц, начиная исследования, которые должны были бы по меньше мере согласно тому, что он сам говорит, привести его к открытию своего метода, работал над рядами чисел, он рассматривал лишь конечные разности в обычном смысле слова; разности бесконечно малых возникали перед ним лишь тогда, когда речь шла о применении числовой дискретности к пространственной непрерывности. Введение дифференциалов обосновывалось, следовательно, наблюдением некоторой аналогии между изменениями, соответствующими этим двум видам количества; но их признак бесконечно малых величин происходил от непрерывности величин, к которым они должны были применяться, и таким образом рассмотрение «бесконечно малых» оказывалось у Лейбница тесно связанным с вопросом о «составе непрерывного».

«Бесконечно малые», взятые «в строгом смысле», могли бы быть, как считал Бернулли, *partes minimae* непрерывного; но именно непрерывное, поскольку оно как таковое существует, всегда делимо и, как следствие, оно не могло бы иметь *partes minimae*. «Неделимые» не являются даже частями того, по отношению к чему они неделимы, и минимум может быть здесь понят лишь как предел или граница, но не

как элемент: «Линия не только не меньше, чем любая поверхность, — говорит Лейбниц, — но она не является даже и частью поверхности, и представляет собой лишь минимум или предел»[75]; и подобие между *extremum* и *minimum* может быть здесь обосновано, с его точки зрения, «законом непрерывности» в той мере, в какой он допускает, согласно ему, «переход к пределу», как мы далее это увидим. Так же, как мы уже говорили, обстоит дело и с точкой по отношению к линии, и кроме того, с поверхностью по отношению к объему; но бесконечно малые элементы, напротив, должны быть частями непрерывного, без чего они не были бы даже величинами; и они могли бы быть таковыми лишь при условии, что они не являются истинными «бесконечно малыми» или теми «последними элементами», само существование которых по отношению к непрерывному подразумевает противоречие. Таким образом, состав непрерывного не допускает, чтобы бесконечно малые были чем-то большим, чем простые фикции; но, с другой стороны, именно существование этого непрерывного делает эти фикции, по меньшей мере в глазах Лейбница, «прочно обоснованными»: если «в геометрии все делается так, как если бы это были совершенно реальные сущности», то потому, что протяженность, являющаяся объектом геометрии, непрерывна; и если точно так же обстоит дело в природе, то потому, что тела также являются непрерывными, и потому, что имеется непрерывность во всех феноменах, таких как движение, местонахождением которого являются тела, и которые являются объектом механики и физики. Между прочим, если тела являются непрерывными, то потому, что они являются протяженными и потому что они причастны природе протяженности; и кроме того, непрерывность движения и различных феноменов, которые могли быть к нему в той или иной мере непосредственно сведены, происходит, в сущности, из их

[75] *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practita Mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas* // *Acta Eruditorum*. Leipzig, 1686.

пространственного характера. Следовательно, в конечном счёте непрерывность протяженности и есть истинное основание всех иных непрерывностей, которые наблюдаются в телесной природе; и именно поэтому, вводя в этой связи важнейшее различие, которого Лейбниц не делал, мы уточняем, что не «материи» как таковой, но протяженности должно на самом деле приписываться свойство «неопределённой делимости».

Мы не должны здесь рассматривать вопрос о других возможных формах непрерывности, независимых от её пространственной формы; на самом деле всегда обращаются именно к ней, когда рассматривают величины, и таким образом её рассмотрения достаточно для всего того, что имеет отношение к бесконечно малым величинам. Тем не менее мы должны к этому добавить непрерывность времени, так как, вопреки странному мнению Декарта по этому поводу, время на само деле является само по себе непрерывным, а не только в пространственном изображении посредством движения, которое служит его мерой[76]. По этому поводу можно было бы сказать, что движение является в некотором отношении вдвойне непрерывным, так как оно является таковым одновременно и в силу своего пространственного условия, и в силу условия времени; и таким образом сочетание времени и пространства, из которого следует движение, было бы невозможно, если бы одно было дискретным, а другое непрерывным. Такой подход позволяет, помимо прочего, ввести непрерывность в некоторые категории природных феноменов, связанные более непосредственно с временем, чем с пространством, хотя и происходящие и в равной мере и в том и в другом, как, например, процесс какого-либо органического развития. Впрочем, можно было бы в отношении состава непрерывного времени повторить всё то, что мы говорили о составе непрерывности пространства, и, в силу такого рода симметрии, которая в некоторых отно-

[76] См.: «Царство количества и знамения времени», глава. V.

шения существует, как мы уже объясняли, между пространством и временем, прийти к строго аналогичным заключениям: мгновения, понятые как неделимые, не являются частицами длительности, как и точки не являются частями протяженности, что признает и сам Лейбниц, и здесь перед нами ещё один тезис, совершенно обычный у схоластов; в конечном счёте общим признаком непрерывного целого является то, что его природа не предполагает существования «последних элементов».

Все то, о чём мы до сих пор здесь говорили, в достаточной мере показывает, в каком смысле можно понимать, что, с той точки зрения, на которой располагается Лейбниц, непрерывное неизбежно включает в себя бесконечное; но, разумеется, мы не могли бы допустить, что речь здесь могла бы идти об «актуальной бесконечности», как если бы все возможные части должны были бы действительно быть данными, когда дано целое, или, помимо прочего, об истинной бесконечности, которая исключает любое определение, каким бы оно ни было, и которая, как следствие, не может подразумеваться ни при каком рассмотрении какой-либо частной вещи. Однако здесь, как и в любом случае, где изображается идея мнимой бесконечности, отличная от истинной метафизической бесконечности и представляющая собой не что иное, как простую абсурдность, любое противоречие исчезает, а вместе с ним любое логическое затруднение, если заменить эту так называемую бесконечность неопределённостью и если просто сказать, что любое непрерывное содержит в себе некоторую неопределённость, когда его рассматривают в связи с его элементами. Как раз в силу неспособности сделать такое фундаментальное различие бесконечного и неопределённого некоторые ошибочно и полагают, что избежать противоречия определённой бесконечности можно, только полностью отвергнув непрерывное и заменив его дискретным; в частности, Ренувье, справедливо отрицавший математическую бесконечность, но в равной мере чуждый и идее метафизической бесконечности, считал себя обя-

занным, в силу логики своего «финитизма», допускать даже атомизм, обращаясь тем самым к другой концепции, которая, как мы видели ранее, не менее противоречива, чем та, что он желал отвергнуть.

Глава XI. «Закон непрерывности»

Поскольку существует непрерывное, мы можем вместе с Лейбницем сказать, что в природе имеется непрерывность или, если угодно, что должен быть некий «закон непрерывности», применимый ко всему, что имеет признаки непрерывного; это в конечном счёте очевидно, но из этого ни в коей мере не следует, что такой закон должен быть применим, как он утверждает, ко всему, так как, если существует непрерывное, то существует также и дискретное, в том числе и в области количества[77]: на самом деле число по своей сути дискретно, и как раз эта самая дискретная величина, а не величина непрерывная, и является в реальности, как мы об этом уже говорили, первой и фундаментальной формой количества или того, что можно было бы назвать, собственно говоря, чистым количеством[78]. С другой стороны, ничто не позволяет предположить *a priori*, что вне количества могла бы рассматриваться какая-либо непрерывность, и даже, правду сказать, было бы удивительно, что одно только число из всех возможных вещей обладает свойством быть исключительно дискретным; но наше намерение не заключается в том, чтобы исследовать здесь, в каких границах «за-

[77] См.: Кутюра Л. «О математической бесконечности». «Вообще, принцип непрерывности не имеет места в алгебре, и не может упоминаться для обоснования алгебраического обобщения числа. Не только непрерывность ни в коей мере не необходима для спекуляций общей арифметики, но она претит самому духу этой науки и самой природе числа. На самом деле число по своей сути является дискретным, как и почти все его арифметические свойства... Нельзя, следовательно, наделять непрерывность алгебраическими функциями, какими бы сложными они ни были, поскольку целое число, которое составляет все её элементы, является дискретным и в каком-то отношении «перескакивает» от одного значения к другому без возможного перехода».

[78] См.: «Царство количества и знамения времени», глава II.

кон непрерывности» на самом деле применим и какие ограничения были бы необходимы, чтобы распространить его на всё то, что превосходит область количества, понятого в его самом общем смысле. Мы ограничимся тем, что приведём в том, что касается природных феноменов, весьма простой пример дискретности: если необходима некоторая сила, чтобы разорвать веревку, и если применить к этой веревке силу, интенсивность которой будет меньше, чем требуется, то мы не получим частичного разрыва, то есть разрыва одной части нитей, которые составляют веревку, но получим лишь напряжение, что разумеется, совершенно не то, что нужно; если увеличивать силу непрерывным образом, напряжение также будет вначале непрерывно возрастать, но наступит момент, когда разрыв произойдет, и тогда, внезапно и в каком-то роде мгновенно, возникнет эффект совершенно иной природы, чем предшествующий, что явным образом и предполагает дискретность; и поэтому было бы неверно утверждать, в совершенно общих терминах и без какого-либо рода ограничений, что *natura non facit saltus*.

Как бы то ни было, в любом случае достаточно, чтобы геометрические величины были непрерывными, какими на самом деле они и являются, чтобы можно было всегда брать оттуда элементы насколько угодно малые, то есть способные становиться меньшими, чем любая значимая величина; и как об этом говорит Лейбниц, «несомненно, именно в этом и заключается строгое доказательство исчисления бесконечно малых», которое как раз и применимо к геометрическим величинам. «Закон непрерывности» может, следовательно, быть *fondamentum in re* тех фикций, какими являются бесконечно малые величины, а также, между прочим, и тех иных фикций, какими являются мнимые корни, поскольку Лейбниц в этой связи сближает их друг с другом, не усматривая в этом, как он, возможно, желал, «камень преткновения для всякой истины»[79]. С другой стороны, если допустить «закон

[79] Кутюра Л. «О математической бесконечности», стр. 266.

непрерывности», накладывая некоторые ограничения на его значение, и даже если признать, что такой закон мог служить обоснованием исчисления бесконечно малых, *modo sano sensu intelligantur*, из этого ни в коей мере не следует, что необходимо его понимать именно так, как это делал Лейбниц, и принимать все последствия, которые сам он стремился из него вывести; именно эту концепцию и эти следствия нам теперь и предстоит изучить более внимательно.

В самом общем виде этот закон сводится в итоге к тому, что Лейбниц неоднократно высказывал в различных терминах, но смысл чего всегда, в сущности, оставался тем же самым: поскольку имеется определенный порядок принципов, понимаемых здесь в относительном смысле данных, которые принимаются в качестве исходного пункта, то должен быть всегда и соответствующий порядок в тех следствиях, которые из них будут извлечены. Это, как мы уже указывали, частный случай «закона справедливости», то есть порядка, который постулирует «универсальная интеллигибельность»; для Лейбница это, в сущности, следствие или применение «принципа достаточного основания», если не сам этот принцип, применяемый более специально к комбинациям или к изменениям количества: «непрерывность есть нечто идеальное», говорит он, что, впрочем, далеко не столь ясно, как того хотелось бы, «но реальность не допускает, чтобы ею управлял идеал или абстракция, ...потому что всё управляется разумом»[80]. Разумеется, есть определенный порядок вещей, и это здесь не ставится под сомнение, но можно мыслить этот порядок совершенно иначе, чем это делает Лейбниц, идеи которого в этом отношении всегда находились под более или менее непосредственным влиянием его так называемого «принципа наилучшего», которые теряет все своё значение, как только мы понимаем метафизическое

[80] Уже цитированное письмо Вариньону от 2 февраля 1702 г.

тождество возможного и реального[81]; более того, хотя он и был явным противником картезианского рационализма, можно, что касается его концепции «универсальной интеллигибельности», упрекнуть его в том что он слишком легко смешивал «интеллигибельное» и «рациональное»; но мы не будем более задерживаться на этих рассуждениях общего порядка, так как они нас увели бы слишком далеко от нашей темы. Мы только добавим по этому поводу, что вызывает удивление, что после того, как он утверждал, что «нет нужды ставить математический анализ в зависимость от метафизических споров», что, между прочим, вовсе не бесспорно, поскольку это значило бы сделать из математики, следуя чисто профанной точке зрения, науку, полностью игнорирующую свои собственные принципы, и что, впрочем, одно лишь непонимание могло породить споры в метафизической области, Лейбницу в конце концов приходится в подтверждение своего «закона причинности», с которым он связывает сам этот математический анализ, обратиться к аргументу уже на самом деле не метафизическому, а теологическому, который мог бы вызвать и множество иных споров: «Именно поэтому все управляется разумом, говорит он, и поэтому в ином случае не было бы ни науки, ни правила, что не соответствовало бы природе высшего принципа»[82], на что можно было бы ответить, что разум на самом деле является только человеческой способностью индивидуального уровня, и что, даже не поднимаясь до «высшего принципа», умозрение, понимаемое в универсальном смысле, то есть как чистый и трансцендентный интеллект, есть нечто совершенно иное, чем разум, и не может быть никоим образом

---

[81] См.: «Множественные состояния существа». Глава II.

[82] То же самое письмо Вариньону. — Первое изложение «закона непрерывности» появилось в *Nouvelles de la République des Lettres*, в июле 1687 г., под этим весьма значительным с той же самой точки зрения заголовком: *Principium quoddam generale non in Mathematicis tantum sed et Physicis utile, cujus ope ex consideratione Sapientiæ Divinæ examinantur Naturæ Leges, qua occasione nata cum R. P. Mallebranchio controversia explicatur, et quidam Cartesianorum errores notantur*.

ему подобным, так что, если верно, что нет ничего «иррационального», то тем не менее существует много вещей, которые являются «сверхрациональными», но которые, между прочим, не становятся от этого менее «интеллигибельными».

Мы перейдем теперь к другому, более точному выражению «закона непрерывности», выражению, которое более непосредственно, чем предшествующее, связано с принципами исчисления бесконечно малых: «Если один случай непрерывно связывается в данных с другим случаем и в конце концов в нём растворяется, то необходимо, чтобы следствия этих случаев так же непрерывно связывались в искомых решениях и чтобы в конечном счёте они взаимно завершались друг в друге»[83]. Здесь есть две вещи, которые необходимо различать: прежде всего, если различие двух случаев уменьшается до того, что становится меньшим, чем любая значимая величина *in datis*, то оно также должно быть *in quaesitis*; это в конечном счёте лишь применение более общего выражения, и вовсе не эта сторона закона способна вызвать возражения, поскольку допускается, что существуют непрерывные изменения и что именно к той области, где осуществляются такие изменения, то есть к геометрической области, и относится, собственно говоря, исчисление бесконечно малых; но следует ли помимо этого допустить, что *casus in casum tandem evanescat*, и что, как следствие, *eventus casuum tandem in se invicem desinant*? Иными словами, должно ли различие двух случаев быть всегда строго нулевым вследствие его непрерывного и неопределённого уменьшения, или же, если угодно, такое уменьшение, хотя и неопределённое, сумеет достичь своего завершения? Здесь, по сути дела, вопрос в том, чтобы знать, может ли в непрерывном изменении быть достигнут предел; и вслед за этим мы прежде всего отметим следующее: поскольку неопределённое, каким оно подразумевается в непрерывном, всегда содержит в себе

[83] Specimen Dynamicum pro admirandis Naturae Legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis et ad suas causas revocandis. Pars II.

нечто в некотором отношении «неисчерпаемое», и поскольку Лейбниц, между прочим, не допускает, что деление непрерывного может дойти до конечного завершения, и даже что такое завершение действительно существует, то не является ли совершенно логичным и последовательным с его стороны в то же самое время допустить, что непрерывное изменение, которое осуществляется *per infinitos gradus intermedios*[84], может дойти до своего завершения? Это не означает, разумеется, что предел не может быть достигнут никоим образом, что привело бы исчисление бесконечно малых к тому, что оно уже не могло бы быть чем-то иным, кроме простого метода приближения; но если он на самом деле достижим, это не должно быть ни в самом непрерывном изменении, ни как окончательное завершение неопределённого ряда *gradus mutationis*. Тем не менее именно посредством «закона непрерывности» Лейбниц стремится обосновать «переход к пределу», который не является самым меньшим из тех затруднений, что вызывает его метод с логической точки зрения, и именно здесь его выводы становятся совершенно неприемлемыми; но чтобы эта сторона вопроса могла быть полностью понята, нам необходимо начать с уточнения математического понятия самого предела.

[84] Письмо Шуленбургу от 29 марта 1698 г.

Глава XII. Понятие предела

Понятие предела является одним из наиболее важных понятий, которые мы здесь должны изучить, так как именно от него зависит все значение метода исчисления бесконечно малых в его строгом соблюдении; можно даже дойти до утверждения, что в конечном счёте «весь алгоритм исчисления бесконечно малых основывается на одном лишь понятии предела, так как именно это строгое понятие используется для определения и обоснования всех символов и всех формул исчисления бесконечно малых»[85]. На самом деле цель этого исчисления «сводится к исчислению пределов соотношений и пределов сумм, то есть к поиску постоянных значений, к которым сводятся соотношения или суммы переменных величин, по мере того как они до неопределённости возрастают, следуя данному закону»[86]. Для ещё большей точности мы скажем, что из двух отраслей, на которые разделяется исчисление бесконечно малых, дифференциальное исчисление состоит в вычислении пределов соотношений, два члена которых одновременно возрастают до неопределённости в соответствии с определённым законом таким образом, что само отношение всегда сохраняет конечное и определённое значение; а интегральное исчисление состоит в вычислении пределов сумм элементов, множество которых возрастает до неопределённости в то же самое время, когда значение каждого из них до неопределённости уменьшается, так как необходимо, чтобы эти два условия были соединены, чтобы сама сумма всегда оставалась определённой и конечной величиной. Когда это установлено, то мож-

[85] Кутюра Л. «О математической бесконечности». Введение. С. XXIII.

[86] Фрейсине Ш. де. «Об анализе бесконечно малых». Предисловие. С. VIII.

но, вообще говоря, утверждать, что предел переменной величины представляет собой другую величину, рассматриваемую как постоянная, и к которой, как предполагается, эта переменная величина приближается посредством значений, которые она последовательно принимает в ходе своего изменения, пока не будет от неё отличаться насколько угодно мало, или, иными словами, пока различие этих двух величин не станет меньше, чем любая определённая величина. Пункт, на котором мы должны особенно настаивать, по причинам, которые будут более понятными впоследствии, — то, что предел, в сущности, понимается как постоянная и определённая величина; даже когда она не была задана условиями задачи, следует всегда начинать с того, чтобы задавать ей определённое значение и продолжать рассматривать её как постоянную до конца вычислений.

Но совсем иное — это концепция предела самого по себе, и совсем иное — логическое обоснование «перехода к пределу»; Лейбниц считал, что «то, что вообще обосновывает этот «переход к пределу» — это тот факт, что то же самое отношение, которое существует между множеством переменных величин, существует и между их постоянными пределами, когда их изменения непрерывны, так как тогда они на самом деле достигают соответствующих им пределов; это иное выражение принципа непрерывности»[87]. Но вопрос как раз в том, чтобы знать, может ли переменная величина, которая до неопределённости приближается к своему постоянному пределу и которая, как следствие, согласно самому определению предела, может отличаться от него насколько угодно мало, — может ли эта переменная величина действительно достичь этого предела вследствие самого своего изменения, то есть может ли предел быть понят как последний член непрерывного изменения. Мы увидим, что в реальности такое решение неприемлемо; в данный момент скажем только,

[87] Кутюра Л. «О математической бесконечности», стр. 268, примечание. — Это точка зрения, которая, в частности, излагается в «Обосновании исчисления бесконечно малых исчислением обычной алгебры».

обещая вернуться к этому немного позже, что истинное понятие непрерывности не позволяет рассматривать бесконечно малые количества как способные когда-либо стать равными нулю, так как они перестали бы тогда быть величинами; для самого же Лейбница они должны всегда сохранять характер настоящих величин, и даже тогда, когда их рассматривают как «исчезающие». Бесконечно малая разность никогда не сможет быть строго нулевой; как следствие, переменная, поскольку она будет рассматриваться как таковая, будет всегда реально отличаться от своего предела, и она не сможет достичь его, не утратив тем самым свой характер переменной.

Вслед за этим мы сможем полностью принять, за исключением одной малозначащей оговорки, те рассуждения, которые один математик, уже нами цитированный, изложил в таких выражениях: «То, что характеризует предел, как мы его определили, так это одновременно и то, что переменная может насколько угодно приближаться к нему, и то, что она тем не менее никогда не сможет его в строгом смысле достичь, так как, чтобы она его действительно достигла, необходимо осуществление некоторой бесконечности, которая для нас неизбежно запрещена... Кроме того, следует придерживаться идеи неопределённой приблизительности, то есть все более и более значительной»[88]. Вместо того чтобы говорить об «осуществлении некоторой бесконечности», что не имело бы для нас никакого смысла, мы просто скажем, что необходимой, чтобы некоторая неопределённость была исчерпана в том, что в ней как раз и имеется неисчерпаемое, но чтобы в то же самое время возможности развития, которые включает в себя сама эта неопределённость, позволяли бы достичь насколько угодно большого приближения, *ut error fiat minor dato*, согласно выражению Лейбница, для которого «метод надежен», как только результат достигнут. «Свойство предела, в силу которого переменная никогда его

[88] См.: Фрейсине Ш. де. «Об анализе бесконечно малых», стр. 18.

точно не достигает, имеет иное определение, нежели определение переменной; а переменная, со своей стороны, все больше и больше приближаясь к своему пределу, не достигает его, потому что она никогда не перестаёт соответствовать своему первоначальному определению, которое, скажем мы, является иным. Необходимое различие между двумя определениями предела и переменной встречается везде... Тот факт, что два определения являются логически различными и что тем менее такие определённые объекты могут все больше и больше сближаться друг с другом[89], обеспечивает то, что может, на первый взгляд, показаться странным, — невозможность совпадения двух величин, различие между которыми имеет полную возможность сокращаться за пределы любого выражения»[90].

Едва ли есть нужда говорить, что в силу современной тенденции все сводить исключительно к количественному, эту концепцию предела не упускают возможности упрекнуть за то, что она вводит качественное различие в науку о самом количестве; но если бы требовалось отвергнуть её по этой причине, то требовалось бы также, чтобы геометрия себе полностью запретила, наряду с другими вещами, рассмотрение подобия, которое также, как мы уже объясняли, является чисто качественным, поскольку оно касается лишь формы фигур, абстрагируясь от их величины, следовательно, от всякого собственно количественного элемента. Впрочем, было справедливо по этому поводу заметить, что одно из главных использований дифференциального исчисления заключается в том, чтобы определить направления касатель-

[89] Было бы точнее сказать, что одна из них может все больше и больше приближаться к другой, поскольку только один из этих объектов переменный, тогда как другой является, в сущности, постоянным, и что поэтому, в силу самого определения предела, их сближение ни в коей мере не может рассматриваться как образующее взаимное отношение, две формы которого были бы в некотором роде взаимозаменяемыми; эта невзаимность подразумевает, между прочим, что их различие принадлежит, собственно, к количественному порядку.

[90] Там же, стр. 19.

ных в каждой точке кривой, направления, совокупность которых определяет саму форму кривой, и что направление и форма как раз и являются в пространственном порядке элементами, характер которых, в сущности, количественный[91]. Кроме того, это решение не стремится просто-напросто упразднить «переход к пределу» под предлогом, что математик может уклониться о того, чтобы на самом деле к нему переходить, и что это ни в коей мере не затруднит ему довести свои вычисления до конца; это может быть верным, но важно следующее: до какой степени при таких условиях он вправе рассматривать вычисление как основывающееся на строгом доказательстве, и даже если «метод надежен», не будет ли этот метод всего лишь простым методом приближения? Можно было бы возразить, что концепция, которую мы только что изложили, также делает невозможным «переход к пределу», поскольку этот предел как раз и обладает тем признаком, что он никогда не может быть достигнут; но это верно лишь в некотором смысле, и только в той мере, в какой рассматриваются переменные величины как таковые, так как мы не говорили, что предел никоим образом не может быть достигнут, но, и это здесь весьма важно уточнить, этого не может произойти при изменении и в качестве его завершения. Что действительно невозможно, так это одна лишь концепция «перехода к пределу» как образующая завершение непрерывного изменения; мы должны, следовательно, заменить её другой концепцией, и именно это мы и сделаем впоследствии.

[91] См.: «Царство количества и знамения времени», глава IV.

Глава XIII. Непрерывность и переход к пределу

Мы можем теперь вернуться к изучению «закона непрерывности» или, точнее, того аспекта этого закона, который мы на мгновение оставили в покое и который является тем аспектом, посредством которого, как полагал Лейбниц, ему удалось обосновать «переход к пределу», потому что для него из этого закона следует, «что в непрерывных величинах крайний исключительный случай может рассматриваться как подтверждающий правило, и поэтому этот последний случай, хотя и совершенно иной по природе, подобен непрерывному в латентном состоянии в общем законе других случаев»[92]. Именно в этом коренится, хотя, кажется, он об этом и не подозревает, главный логический изъян его концепции непрерывности, как довольно легко убедиться в этом по последствиям, которые он из него извлекает, и по применениям, которые он делает; вот несколько примеров: «В силу моего закона непрерывности позволительно рассматривать покой как бесконечно малое движение, то есть как эквивалент разновидности его противоречия, а совпадение — как бесконечно малую дистанцию, равенство — как последнее из неравенств и т. д.»[93] И ещё: «В согласии с этим законом непрерывности, который исключает любой скачок в изменении, случай покоя может рассматриваться как особый случай движения, а именно как движение исчезающее или минимальное, а случай равенства — как случай исчезающего неравенства. Из этого следует, что законы движения должны быть установлены таким образом, чтобы не было

---

[92] *Epistola ad V. Cl. Christianum Wolfium, Professorem Matheseos Halensem, circa Scientiam Infiniti* // Acta Eruditorum. Leipzig, 1713.

[93] Уже цитированное письмо Вариньону от 2 февраля 1702 г.

нужды в частных правилах для тел в равновесии и в покое, но чтобы эти последние состояния сами рождались из правил, касающихся тел в неравновесии и в движении; или, если мы желаем высказать особые правила для покоя и равновесия, необходимо остерегаться, чтобы они не были такими, что они не смогут согласоваться с гипотезой, принимающей покой за зарождающееся движение, а равенство — за последнее неравенство»[94]. Добавим также следующую последнюю цитату по данному поводу, где мы обнаружим пример нового рода, несколько отличный от предыдущего, но не менее спорный с логической точки зрения: «Хотя по крайней мере не совсем верно, что покой есть разновидность движения, или что равенство есть разновидность неравенства, как неверно и то, что круг есть разновидность правильного многоугольника, тем не менее можно сказать, что покой, равенство и круг завершают движение, неравенство и правильный многоугольник, которые посредством непрерывных изменений доходят до этого и исчезают. И хотя эти завершения являются исключениями, то есть они, строго говоря, не включены в те разновидности, которые они ограничивают, тем не менее они обладают их свойствами, как если бы они были в них включены, в соответствии с языком бесконечных или бесконечно малых величин, который принимает, например, круг за правильный многоугольник, число сторон которого бесконечно. Иначе закон непрерывности был бы нарушен, то есть поскольку мы переходим от многоугольников к кругу посредством непрерывного изменения и не совершая скачка, то необходимо также, чтобы не было никакого скачка и при переходе от свойств многоугольника к свойствам круга»[95].

---

[94] *Specimen Dynamicum*, уже цитированное выше.

[95] «Обоснование исчисления бесконечно малых исчислениями обычной алгебры», примечание, приложенное к письму Вариньона Лейбницу от 23 мая 1702 г., в котором упоминается, что это письмо было отправлено Лейбницем, чтобы быть помещённым в *Journal de Trévoux*. — Лейбниц берёт слово «постоянный» в значении «непрерывный».

Необходимо сказать, что, как указывает начало последнего отрывка, который мы только что цитировали, Лейбниц рассматривает эти утверждения как разновидность тех, что являются лишь *toleranter verae*, и которые, говорит он, с другой стороны, «служат главным образом искусству изобретения, хотя, по моему мнению, они содержат в себе нечто фиктивное и вымышленное, что может быть тем не менее легко исправлено посредством приведения к обычным выражениям, чтобы не смогла возникнуть ошибка»[96]; но являются ли они даже таковыми, и не содержат ли они в себе на самом деле просто-напросто противоречия? Несомненно, Лейбниц признает, что крайний случай, или *ultimus casus*, является *exclusivus*, что явно предполагает, что он находится за пределами ряда случаев, которые естественным образом включаются в общий закон; тогда по какому праву его включают в этот же самый закон и трактуют его как *ut inclusivum*, то есть как если бы это был простой частный случай, включенный в этот ряд? Верно, что круг является пределом правильного многоугольника, число сторон которого увеличивается до неопределённости, но его определение, в сущности, иное, чем определение многоугольников; и мы ясно видим на таком примере, как этот, качественное различие, которое существует, как мы говорили, между самим пределом и тем, для чего он пределом является. Покой никоим образом не является частным случаем движения, а равенство — частным случаем неравенства, совпадение не является частным случаем расстояния, а параллельность — частным случаем совпадения; Лейбниц, между прочим, не допускает, что они являются такими частными случаями в строгом смысле, но он тем не менее утверждает, что в каком-то отношении они могут таковыми рассматриваться таким образом, что «род

[96] Epistola ad V. Cl. Christianum Wolfium, уже цитированное выше.

завершается в мнимой противоположной разновидности»[97], и что нечто может быть эквивалентом разновидности своего противоречия». Заметим мимоходом, что это, кажется, относится к тому же порядку идей, с которым связано понятие «виртуальности», понимаемое Лейбницем в том особом смысле, какой он ему дает, как возможность, которая была бы действием, начинающим осуществляться[98], что не менее противоречиво, чем иные примеры, которые мы только что процитировали.

С какой бы точки зрения мы всё это ни рассматривали, мы совершенно не видим, как некоторая разновидность может быть «предельным случаем» противоположного вида или рода, так как противоположности взаимно ограничивают друг друга вовсе не в этом смысле, но, наоборот, в том, что они исключают друг друга, и невозможно, чтобы противоположности были сводимы друг к другу; и может ли, например, неравенство сохранять значение иначе, чем по мере того, как оно противопоставляется равенству и является его отрицанием? Мы, конечно, не можем сказать, что такие утверждения, как это, являются *toleranter verae*; даже когда не допускается существование абсолютно раздельных родов, тем не менее верно, что какой-либо род, определяемый в качестве такового, никогда не может стать неотъемлемой частью другой в равной мере определённого рода, определение которого не включает его собственного свойства, и если даже оно его формально и не исключает, как в случае с противоречиями, и что если связь может быть установлена между различными родами, это не может произойти там, где они действительно различны, но только посредством высшего рода, в который они оба в равной мере

---

[97] *Initia Rerum Mathematicarum Metaphysica*. Лейбниц буквально по тексту говорит: *genus in quasi-speciem oppositam desinit*, и использование такого странного выражения *quasi-speciem*, кажется, указывает по меньшей мере на некоторое затруднение придать видимость правдоподобия этому выражению.

[98] Подразумевается, что слова «действие» и «возможность» взяты здесь в их аристотелевском и схоластическом смысле.

входят. Такая концепция непрерывности, приводящая к упразднению не только всякого разделения, но также и любого действительного различия, допуская прямой переход от одного рода к другому без сведения к высшему или более общему роду, является, собственно говоря, самим отрицанием всякого истинно логического принципа; отсюда до гегелевского утверждения о «тождестве противоречий» только один шаг, который едва ли затруднительно преодолеть.

Глава XIV. «Исчезающие величины»

Обоснование «перехода к пределу» состоит в итоге для Лейбница в том, что частный случай «исчезающих величин», как он говорит, должен в силу непрерывности быть в некотором смысле включен в общее правило; и, между прочим, эти исчезающие величины не могут рассматриваться как «абсолютно ничтожные» или как чистые нули, так как всегда в силу той же самой непрерывности они сохраняют между собой определённое отношение, обычно отличающееся от единицы, в то самое мгновение, когда они исчезают, что предполагает, что они ещё являются настоящими величинами, хотя и незначительными по отношению к обычным величинам[99]. Тем не менее, если исчезающие величины, или, что имеет то же самое значение, величины бесконечно малые не являются «абсолютно ничтожными», даже когда речь идёт о дифференциалах порядка выше первого, они должны рассматриваться как «относительно ничтожные», то есть если они полностью сохраняют характер переменных величин, ими можно и должно пренебречь даже в отношении обычных величин, с которыми они «несравнимы»[100]; но умноженные на «бесконечные» величины или на несоизмеримо большие, чем обычные величины, они воспроизводят обычные величины, чего не могло бы

---

[99] Для Лейбница 0/0 = 1, потому что, говорит он, «ничто означает другое»; но, поскольку имеем $0 \times n = 0$, и это так, каким бы ни было число n, то очевидно, что можно также записать $0/0 = n$, и именно поэтому это выражение 0/0 обычно рассматривается как изображающее то, что называют «неопределённой формой».

[100] Различие между этим и сравнением с песчинкой заключается в том, что как только речь идёт об «исчезающих величинах», это неизбежно предполагает, что речь идёт о переменных величинах, а не о величинах постоянных и определённых, какими бы малыми они не предполагались.

быть, если бы они были абсолютно ничтожными. Можно видеть благодаря тем определениям, которые мы дали ранее, что рассмотрение отношения между исчезающими величинами, оставаясь определённым, соотносится с дифференциальным исчислением, и что рассмотрение произведения тех же самых исчезающих величин на «бесконечные» величины, дающего обычные величины, соотносится с интегральным исчислением. Трудность во всём этом заключается в том, чтобы допустить, что величины, не являющиеся абсолютно нулевыми, должны тем не менее рассматриваться как нулевые в исчислениях, что рискует создать впечатление, что речь идёт лишь о простом приближении; в связи с этим Лейбниц также иногда вспоминает о «законе непрерывности», посредством которого «предельный случай» оказывается сведенным к общему правилу, как единственному постулату, которого требует его метод; но этот аргумент, впрочем, весьма неясен, и необходимо, скорее, вернуться к понятию «несравнимых», как он это чаще всего и делает, чтобы обосновать устранение бесконечно малых величин в результатах вычислений.

Лейбниц действительно рассматривает как равные не только величины, разность которых является нулевой, но ещё и величины, разность которых несравнима с самими этими величинами; и именно на этом понятии «несравнимых» основывается для него не только устранение бесконечно малых величин, которые исчезают перед обычными величинами, но также и различие различных порядков бесконечно малых величин или дифференциалов, где величины каждого из этих порядков несравнимы с величинами предыдущего, как величины первого порядка несравнимы с обычными величинами, но никогда не доходят до «абсолютно ничтожных». «Я называю несравнимыми величинами, — говорит Лейбниц, — те, одна из которых, умноженная на некоторое конечное число, каким бы оно ни было, не могла бы превысить другую, подобно тому как Евклид брал

их в своем пятом определении пятой книги»[101]. В этом, между прочим, нет ничего, что указывает, должно ли такое определение распространяться на определённые и постоянные величины или на величины переменные; но можно допустить, что при всей своей всеобщности оно должно без различий применяться и в том и в другом случае: весь вопрос тогда бы состоял в том, чтобы знать, могут ли когда-либо две постоянные величины, какими бы различными они ни были в масштабе величин, рассматриваться как реально «несравнимые», или же они являются таковыми лишь относительно средств измерения, которыми мы располагаем. Но здесь на этом неуместно настаивать, поскольку сам Лейбниц заявлял, между прочим, что этот случай не является случаем дифференциалов[102], из чего необходимо сделать вывод не только, что сравнение с песчинкой было само по себе ошибочным, но что оно, в сущности, не соответствовало в его собственной мысли истинному понятию «несравнимых», по крайней мере в том, что это понятие должно применяться к бесконечно малым величинам.

Некоторые тем не менее считали, что исчисление бесконечно малых может стать совершенно строгим лишь при условии, что бесконечно малые величины рассматриваются как нулевые, и в то же самое время они напрасно думали, что ошибка может предполагаться нулевой, как только она предполагается насколько угодно малой; напрасно, скажем мы, так как это означает то же самое, что допустить, что переменная, как таковая, может достичь своего предела. Между прочим, вот что говорит по этому поводу Карно: «Есть люди, которые думают, что в достаточной мере устанавливают принцип анализа бесконечно малых, когда выдвигают следующий довод: очевидно, говорят они, и это весь мир признает, что ошибки, которым процедуры анализа бесконечно малых дают место, если они имеются, могут всегда

[101] Письмо маркизу Лопиталю от 14-24 июня 1695 г.

[102] Уже цитированное письмо Вариньону от 2 февраля 1702 г.

предполагаться насколько угодно малыми; очевидно также, что любую ошибку мы вправе предполагать настолько малой, что можно считать её ничтожной, так как, поскольку можно предположить её насколько угодно малой, то можно предположить её и равной нулю; следовательно, результаты анализа бесконечно малых являются строгими и точными. Такой довод, на первый взгляд правдоподобный, тем не менее не является справедливым, так как неверно утверждать, что поскольку мы вправе сделать ошибку насколько угодно малой, то можно ради этого сделать её ничтожной... Мы оказываемся перед неизбежной альтернативой — или совершить ошибку, какой бы малой мы ни желали её предполагать, или натолкнуться на формулу, которая ничему не учит, и именно в этом и заключается центральный пункт трудностей в анализе бесконечно малых»[103].

Верно, что формула, в которую вводится отношение, предстающее в виде 0/0, «ничему не учит», и можно даже сказать, что сама она не имеет никакого смысла; только в силу конвенции, между прочим, обоснованной, можно придать смысл этой форме 0/0, рассматривая её как символ неопределённости[104]; но сама эта неопределённость служит причиной, что отношение, взятое в таком виде, может быть равным чему угодно, тогда как оно должно, наоборот, в каждом частном случае, сохранять определённое значение: на существование такого определённого значения и ссылается Лейбниц[105], и сам по себе этот аргумент совершенно неотра-

---

[103] Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 36.

[104] См. предыдущее замечание по этому поводу.

[105] С тем различием, что для него отношение 0/0 является не неопределённым, но всегда равным 1, как мы об этом выше говорили, тогда как значение, о котором идёт речь, отличается в каждом случае.

зим[106]. Однако, необходимо признать, что понятие «исчезающих величин» имеет, согласно выражению Лагранжа, «большое неудобство в том, что рассматривает величины в состоянии, в котором они, образно выражаясь, перестают быть величинами»; но вопреки тому, что думал Лейбниц, нет нужды рассматривать их именно в то мгновение, когда они исчезают, ни даже допускать, что они могут действительно исчезнуть, так как в этом случае они действительно перестают быть величинами. Это, по сути дела, предполагает, что нет «бесконечно малого» в строгом смысле слова, так как это «бесконечно малое», или по крайней мере то, что так называют, принимая язык Лейбница, может быть лишь нулем так же, как «бесконечно большое», понимаемое в том же самом смысле, могло быть лишь «бесконечным числом»; но на самом деле нуль — это не число, и нет никакой «нулевой величины», как и «бесконечной величины». Математический нуль в его прямом и строгом значении есть лишь отрицание, по крайней мере в количественном отношении, и нельзя сказать, что отсутствие величины образует ещё одну величину; это пункт, к которому мы намерены вскоре вернуться, чтобы более полно изложить различные следствия, которые из него вытекают.

В конечном счёте выражение «исчезающие величины» ошибочно главным образом в том, что даёт повод для двусмысленности и вынуждает считать, что бесконечно малые величины рассматриваются как величины, которые на самом деле аннулируются, так как, если только не менять смысл слова, трудно понять, что «исчезать», когда речь идёт о величинах, могло бы означать нечто иное, чем аннулироваться. В действительности эти бесконечно малые величи-

---

[106] См.: Фрейсине Ш. де. «Об анализе бесконечно малых», стр. 45-46: «Если возрастание сводится к состоянию чистого нуля, то оно не имеет никакого значения. Его свойство состоит в том, что оно является не строго нулевым, но до неопределённости уменьшающимся, не могущим никогда смешаться с нулем в силу того общего принципа, что переменная никогда не сможет совпасть со своим пределом».

ны, понимаемые как до неопределённости уменьшающиеся величины, что и является их истинным значением, никогда не могут быть названы «исчезающими» в собственном смысле этого слова, и было бы, разумеется, предпочтительнее никогда не вводить такое понятие, которое, в сущности, опирается на созданную Лейбницем концепцию непрерывности и которое, как таковое, неизбежно включает в себя элемент противоречия, свойственного нелогичности самой этой концепции. Теперь, если какая-то ошибка, способная сделаться насколько угодно малой, никогда не сможет стать абсолютно нулевой, то как исчисление бесконечно малых сможет стать действительно строгим, и, если возникает ошибка, которой можно пренебречь лишь практически, то не следует ли из этого сделать вывод, что вычисление сводится к простому методу приближения, или по меньшей мере, как говорил Карно, методу «компенсации»? Этот вопрос нам ещё предстоит впоследствии решить; но поскольку нам пришлось говорить здесь о нуле и о мнимой «нулевой величине», то лучше вначале обсудить другую тему, значение которой, как мы увидим, вовсе не является незначительным.

Глава XV. Нуль — это не число

Уменьшение чисел до неопределённости не может больше доходить до «нулевого числа», как и их возрастание до неопределённости не может доходить до «бесконечного числа», и не может по той же причине, поскольку одно из этих чисел должно быть обратным другому; действительно, согласно тому, что мы ранее говорили по поводу обратных чисел, которые были в равной мере удалены от единицы в двух последовательностях, одной возрастающей, а другой уменьшающейся, имеющих эту единицу в качестве общей точки отсчета, и поскольку в одной из этих последовательностей столько же членов, сколько и в другой, то последние члены, которыми могли бы быть «бесконечное число» и «число нуль», должны были бы сами, если бы они существовали, быть в равной мере удалёнными от единицы, то есть обратными друг другу[107]. При таких условиях, если знак ∞ является в реальности лишь символом до неопределённости возрастающих величин, то знак 0 должен логически быть принят так же, как символ до неопределённости уменьшающихся величин, чтобы выразить в обозначении симметрию, которая, как мы уже говорили, существует между теми и другими; но, к несчастью, этот знак 0 уже имеет совершенно иное значение, так как он изначально служит

[107] Это могло бы изображаться, согласно обычному обозначению, формулой $0 \times \infty = 1$; но фактически форма $0 \times \infty$, так же как и 0/0, есть «неопределённая форма», и можно записать $0 \times \infty = n$, обозначая под n некоторое число, что, между прочим, уже доказывает, что в реальности 0 и ∞ не могут рассматриваться как изображающие определённые числа; мы, впрочем, ещё вернёмся к этому. Следует отметить, с другой стороны, что $0 \times \infty$ соответствует в отношении к «пределам сумм» интегрального исчисления тому, чем является 0/0 в отношении «пределов соотношений» дифференциального исчисления.

обозначению отсутствия всякой величины, тогда как знак ∞ не имеет никакого реального смысла, который такому иному значению соответствует. Здесь новый источник путаницы наподобие той, что возникает по поводу «исчезающих величин», и следовало бы, чтобы её избежать, создать для неопределённо уменьшающихся величин иной символ, отличный от нуля, поскольку эти величины обладают тем признаком, что никогда не могут аннулироваться в своем изменении; в любом случае при обозначении, на самом деле используемом математиками, кажется почти невозможным, чтобы такого рода путаница не возникла.

Если мы настаиваем на том замечании, что нуль, поскольку он изображает отсутствие всякой величины, не является числом и не может рассматриваться как таковое, хотя это и могло казаться довольно очевидным тем, кто никогда не имел случая познакомиться с некоторыми дискуссиями, то дело в том, что как только мы допускаем существование «нулевого числа», которое должно быть «наименьшим из чисел», мы неизбежно вынуждены предположить в качестве обратного ему числа «бесконечное число» в смысле «наибольшего из чисел». Если, следовательно, принять тот постулат, что нуль — это число, аргументация в пользу «бесконечного числа» может быть затем вполне логичной[108]; но именно этот постулат мы и должны отвергнуть, так как, если следствия, которые из него вытекают, являются противоречивыми, а мы видели, что существование «бесконечного числа» таковым на самом деле и является, то и сам он уже подразумевает противоречие. На самом деле, отрицание величины ни в коей мере не может быть подобно какой-то величине; отрицание числа или величины не может ни в каком смысле и в никакой степени образовать разновидность числа или величины; утверждать противоположное — значит утверждать, что нечто может быть, согласно выражению Лейбница, «эквивалентом разновидности

[108] Фактически именно на этом постулате основывается по большей части аргументация Л. Кутюра в его диссертации «О математической бесконечности».

своей противоположности», и стоило бы сразу же сказать, что отрицание логики — это тоже логика.

Поэтому противоречиво говорить о нуле как о числе, или предполагать «нуль величины», который ещё был бы величиной, из чего неизбежно следовало бы рассмотрение такого же количества нулей, сколько имеется разновидностей различных величин; в реальности может быть лишь чистый нуль, который есть не что иное, как отрицание величины, в каком бы виде оно ни рассматривалось[109]. Ввиду того, что таким и является истинный смысл арифметического нуля, взятого в строгом смысле, очевидно, что этот смысл не имеет ничего общего с понятием неопределённо уменьшающихся величин, которые всегда являются величинами, а не отсутствием величины, и тем более не чем-то таким, что было бы в некотором роде промежуточным между нулем и величиной, что означало бы ещё одну совершенно непонятную концепцию, которая на своем уровне весьма близко напоминала бы концепцию лейбницевской «виртуальности», о которой мы ранее уже сказали несколько слов.

Мы можем теперь вернуться к другому значению, которое сообщают нулю при обычном обозначении, чтобы увидеть, как могла появиться путаница, о которой мы говорили: мы ранее утверждали, что число может рассматриваться в некотором роде как практически неопределённое, поскольку мы больше не имеем возможности выразить его или отчётливо изобразить каким-либо способом; такое чис-

[109] Отсюда также следует, что нуль не может рассматриваться как предел в математическом смысле этого слова, так как настоящий предел всегда, по определению, является величиной; впрочем, очевидно, что величина, уменьшающаяся до неопределённости, не имеет более предела, как и величина, которая до неопределённости возрастает, или что по крайней мере и та и другая не могут иметь иных пределов, кроме тех, что неизбежно следуют из самой природы количества как такового, что представляет собой совершенно иное значение того же самого слова «предел», хотя между этими двумя смыслами имеется определённая связь, на которую мы далее ещё укажем; математически можно говорить лишь о пределе соотношения двух до неопределённости возрастающих величин или двух величин, до неопределённости уменьшающихся, а не о пределе этих самих величин.

ло, каким бы оно ни было, можно будет в возрастающем порядке символизировать знаком ∞, поскольку он изображает неопределённо большое; речь, следовательно, не идёт здесь об определённом числе, но о целой области, что, между прочим, необходимо для того, чтобы было можно рассматривать в неопределённом неравенства и даже различные порядки величины.

В математическом обозначении недостаёт и другого символа — для обозначения области, соответствующей этой первой области в уменьшающемся порядке, то есть того, что можно назвать область неопределённо малого; но поскольку число, принадлежащее этой области, фактически является незначительным при вычислениях, то его привыкли рассматривать как практически нулевое, хотя здесь перед нами лишь простое приближение, вытекающее из неизбежного несовершенства наших средств выражения и измерения, и несомненно именно по этой причине его приходится символизировать тем же самым знаком 0, который изображает с иной стороны строгое отсутствие всякой величины. Только в этом смысле этот знак 0 становится в каком-то роде симметричным знаку ∞, и они могут размещаться взаимно на двух крайних точках ряда чисел, того, который мы ранее рассматривали как расширяющийся до неопределённости посредством целых чисел и посредством чисел, им обратных, в двух направлениях, возрастающем и уменьшающемся. Этот ряд изображается тогда в следующем виде: 0… … 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4… … ∞; но необходимо предостеречь, что 0 и ∞ изображают не два определённых числа, которые завершали бы ряд в двух направлениях, но две неопределённые области, в которых, наоборот, не могло бы быть последних членов по причине самой их неопределённости; впрочем, очевидно, что нуль не мог бы быть здесь ни «нулевым числом», которое было бы последним членом в уменьшающемся направлении, ни отрицанием или отсутствием всякой величины, которое не может иметь никакого места в этом ряду величин.

В том же самом ряду, как мы ранее объясняли, два числа, равноудалённых от центральной единицы, являются обратными друг другу или друг друга взаимодополняющими, поэтому воспроизводящими единицу посредством их умножения: 1/n × n = 1, так что и для двух крайних точек ряда нам пришлось бы также записать 0 × ∞ = 1; но в силу того, что знаки 0 и ∞, являющиеся двумя множителями этого последнего произведения, не представляют собой определённых чисел, из этого следует, что само выражение 0 × ∞ образует символ неопределённости или того, что называют «неопределённой формой», и тогда следует записать 0 × ∞ = *n*, где *n* является любым числом[110]; тем не менее верно, что в любом случае мы приходим к обычному конечному, и две противоположные неопределённости нейтрализуют друг друга. Здесь мы весьма ясно видим ещё раз, что символ × ∞ ни в коем случае не изображает бесконечность, так как бесконечность в своем истинном смысле, не может иметь ничего противоположного и ничего взаимодополнительного, и она не может войти в соотношение с чем бы то ни было, тем более с нулем, в каком бы смысле его ни понимали, или с единицей, или с каким-либо числом, или с частной вещью какого-либо рода, количественного или нет; будучи универсальным и абсолютным Целым, она содержит в себе как Сущее, так и Не-Сущее, и поэтому сам ноль, поскольку он не рассматривается как чистое ничто, должен неизбежно рассматриваться так же как включенный в бесконечность.

Делая здесь ссылку на Не-Сущее, мы прикасаемся к другому значению нуля, совершенно отличному от тех, что мы только что рассматривали, и которое, между прочим, является более важным с точки зрения его метафизического символизма; но в связи с этим необходимо, чтобы избежать любой путаницы между символом и тем, что он изображает, уточнить, что метафизический нуль, который и есть Не-Сущее, не является более нулем величины, как и метафизиче-

[110] См.: предыдущее замечание по этому поводу.

ская единица, которая и есть Сущее, не является единицей арифметической; то, что обозначается этими терминами, может быть лишь преобразованием по аналогии, поскольку, как только мы располагаемся в универсальном, то мы оказываемся, очевидно, за пределами любой специальной области, такой, как область количества. Впрочем, не в той мере, в какой он изображает неопределённо малое, нуль может благодаря такому переносу быть принят за символ Не-Сущего, но в той мере, в какой, согласно его более строгому математическому значению, он изображает отсутствие величины, которое на самом деле символизирует на своем уровне возможность непроявления, так же как единица символизирует возможность проявления, будучи точкой отсчета неопределённого множества чисел, подобно тому как Сущее является принципом всякого проявления[111].

Это вынуждает нас также заметить, что каким бы образом ни рассматривать нуль, он ни в коем случае не может быть принят за чистое ничто, которое метафизически соответствует лишь невозможности, и которое, между прочим, логически ничем не может быть изображено. Это слишком очевидно, когда речь идёт о неопределённо малом; верно, что здесь перед нами, если угодно, лишь производный смысл, порожденный, как мы только что говорили, чем-то вроде приблизительного уподобления незначительной для нас величины отсутствию всякой величины; но в том, что касается самого отсутствия величины, то, что является ничтожным в этом отношении, может не быть таковым в других отношениях, как это ясно видно на таком примере, как пример с точкой, которая, будучи неделимой, является тем самым и непротяженной, то есть пространственно нулевой[112], но которая тем не менее, как мы уже объясняли, представляет собой сам принцип всякой протяженности[113].

---

[111] По этому поводу см.: «Множественные состояния существа», глава III.

[112] Поэтому, как мы выше сказали, точка не может никоим образом рассматриваться как образующая какой-то элемент или часть протяженности.

[113] «Символизм креста». Глава XVI.

Впрочем, действительно странно, что математики вообще имеют привычку рассматривать нуль как чистое ничто, и что тем не менее для них невозможно в то же самое время не рассматривать нуль, как, наделяющий неопределённой степенью, поскольку размещённый справа от другой цифры, называемой «значительной», он способствует формированию представления о числе, которая благодаря повторению этого самого нуля может возрастать до неопределённости, как это происходит, например, в случае числа десять и его последовательных степеней. Если бы действительно нуль был чистым ничто, он не мог бы иметь такие свойства, и даже, правду сказать, он был бы тогда лишь бесполезным знаком, полностью лишённым всякого действительного значения; следовательно, здесь перед нами в современных математических концепциях ещё одна непоследовательность, которую следует добавить ко всем тем, на которые мы уже имели здесь случай указать.

Глава XVI. Обозначение отрицательных чисел

Если мы на секунду вернёмся к двум математическим значениям нуля, то есть нуля, рассматриваемого как изображение неопределённо малого, то, на чем важно прежде всего остановиться, так это на том, что область неопределённо малого включает в себя в двойной неопределённой последовательности чисел всё то, что в определённом смысле находится за пределами средств нашей оценки, так же как область неопределённого большого включает в себя в той же самой последовательности всё то, что находится за пределами средств нашей оценки в ином направлении. При таком положении дел, очевидно, уместно говорить о «числах, меньших, чем нуль», а также о числах, «больших, чем неопределённость»; и это ещё более неприемлемо, если это возможно, когда нуль в своем другом значении просто изображает отсутствие всякой величины, так как величина, которая была бы меньше, чем ничто, собственно говоря, немыслима. Тем не менее именно это в определённом смысле и желают сделать, вводя в математику рассмотрение так называемых отрицательных чисел и забывая при помощи современного «конвенционализма», что эти числа с самого начала не являются чем-то большим, чем обозначением результата вычитания, реально невозможного, посредством которого большее число должно было быть вычтено из меньшего числа; мы уже отметили, между прочим, что все обобщения или расширения идеи числа фактически происходят лишь при рассмотрении операций, невозможных с точки зрения чистой арифметики; но такая концепция отрицательных чисел и следствия, которые она за собою влечет, требует некоторых других пояснений.

Мы ранее говорили, что последовательность целых чисел формируется исходя из единицы, а не исходя из нуля; действительно, когда установлена единица, то вся последовательность чисел выводится из неё таким образом, что можно сказать, что она уже подразумевается и содержится в принципе в этой изначальной единице[114], в то время как из нуля, очевидно, нельзя вывести никакое число. Переход от нуля к единице не может происходить тем же способом, что и переход от единицы к другим числам, или от какого-либо числа к следующему числу, и, в сущности, предполагать возможным переход от нуля к единице — значит уже имплицитно эту единицу устанавливать[115]. Наконец, устанавливать нуль в начале последовательности чисел, как если бы он был первым в этой последовательности, допустимо лишь в двух значениях: либо действительно допуская, что нуль — это число вопреки тому, что мы установили, и, как следствие, что он может иметь с другими числами отношения того же порядка, что и отношения этих чисел между собой, что не так, поскольку нуль, умноженный или разделенный на какое-либо число, всегда даёт нуль; либо это простой прием обозначения, который может повлечь за собой безвыходную путаницу. Фактически использование такого приема оправдано лишь тем, что позволяет ввести обозначение отрицательных чисел, и если использование такого обозначения открывает, несомненно, некоторые преимущества для удобства вычислений, то полностью «прагматический» подход, который здесь не затрагивается и который даже лишён подлинного значения с нашей точки зрения, представляет собой, с другой стороны, как легко в этом убедиться, немало серьёзных логических неудобств. Первое из

[114] Точно так же в силу аналогии все неопределённое множество возможностей проявления содержится в принципе и «в высшей степени» в чистом Сущем или в метафизической Единице.

[115] Это оказывается совершенно очевидным, если в соответствии с общим законом формирования последовательности чисел изобразить такой переход формулой 0 + 1 = 1.

всех затруднений, которым он даёт в этой связи место, — это и есть концепция отрицательных величин как «меньших, чем нуль», которую Лейбниц ставил рядом с утверждениями, являющимися лишь *toleranter verae*, но которая в реальности, как мы только что сказали, полностью лишена всякого значения. «Выдвигать утверждение, что отдельная отрицательная величина меньше, чем нуль, — говорил Карно, — значит обволакивать науку математики, которая должна быть наукой очевидного, непроницаемым туманом и входить в лабиринт все более и более странных парадоксов»[116]. Вслед за этим мы можем обратиться к суждению, которое не вызывает подозрений и не содержит в себе никаких преувеличений; впрочем, никогда не следует забывать при использовании такого обозначения отрицательных чисел, что речь не идёт о чём-то большем, чем простая конвенция.

Причина такой конвенции в следующем: когда вычитание арифметически невозможно, его результат тем не менее доступен интерпретации в случае, когда это вычитание соотносится с величинами, которые могут учитываться в двух противоположных направлениях, как например расстояния, измеряемые на линии, или углы вращения вокруг неподвижной точки, или ещё время, считающееся движущимся исходя из определённого мгновения к будущему или к прошлому. Отсюда геометрическое изображение, которое обычно сообщают этим отрицательным числам: рассчитываются на прямой как положительные, так и отрицательные расстояния, в зависимости от чего они проходят в том или ином направлении, и устанавливается на этой прямой точка, взятая как начало, отталкиваясь от которой, расстояния, называемые положительными, располагаются с одной стороны, а отрицательные — с другой. Каждой точке прямой будет соответствовать число, которое будет мерой своего расстояния до начала, и мы можем, чтобы упростить язык, назвать его коэффициентом; само начало в этом же случае будет, есте-

[116] «Замечание об отрицательных числах», размещённое в конце «Размышлений о метафизике исчисления бесконечно малых».

ственно, иметь коэффициент ноль, а коэффициент любой другой точки будет числом, наделенным знаком (+) или (-), знаком, который в реальности будет просто указывать, с какой стороны эта точка располагается по отношению к началу. На окружности можно даже различить положительное или отрицательное направление вращения, и отсчитывать исходя из изначальной позиции радиуса как положительные, так и отрицательные углы, в зависимости от того, будут ли они вписываться в то или иное из этих двух направлений, что даёт повод для аналогичных замечаний. Если продолжать рассматривать прямую, то две точки, равноудалённые от начала, с одной и с другой от него стороны будут иметь коэффициентом одно и то же число, но с противоположными знаками, а точка, более удалённая от начала, чем другая, будет, естественно, иметь коэффициентом большее число; тем самым очевидно, что если число n больше, чем другое число m, то будет абсурдным утверждать, как это обычно делается, что $-n$ больше, чем $-m$, поскольку оно, наоборот, изображает большую дистанцию. Между прочим, знак, размещаемый таким образом перед числом, не может никоим образом изменить его с точки зрения величины, поскольку он не изображает ничего, что относится к измерению самих дистанций, но только направление, в котором эти дистанции просматриваются, направление, являющееся, собственно говоря, элементом качественного, а не количественного порядка[117].

С другой стороны, прямую, являющуюся неопределённой в двух направлениях, приходится рассматривать как неопределённо положительную и неопределённо отрицательную, что изображается знаками $+\infty$ и $-\infty$, и что обычно обо-

[117] См.: «Царство количества и знамения времени», глава IV. — Можно было бы поставить вопрос, нет ли чего-то вроде бессознательного воспоминания об этом качественном характере в том факте, что математики иногда обозначают числа, взятые «со своим знаком», то есть рассматриваемые как положительные или отрицательные под названием «квалифицированные числа», хотя, кажется, они не придают никакого ясного смысла этому выражению.

значается абсурдными выражениями «плюс бесконечность» и «минус бесконечность»; спрашивается, чем могла бы быть отрицательная бесконечность, или ещё — что могло бы существовать, если бы от чего-то или от ничто (поскольку математики рассматривают ноль как ничто) отняли бесконечность; здесь перед нами те вещи, которые достаточно выразить ясным языком, чтобы сразу же увидеть, что они лишены всякого значения. Необходимо также добавить, что впоследствии приходится, в частности при изучении изменения функций, рассматривать отрицательную неопределённость как смешивающуюся с положительной неопределённостью таким образом, что движущееся тело, начинающее двигаться с исходной точки и постоянно удаляющееся в положительном направлении, возвращалось бы к ней с отрицательной стороны, если бы его движение продолжалось неопределённое время, или наоборот, из чего следует, что прямая, или то, что в качестве таковой рассматривается, должна быть в реальности замкнутой линией, хотя и неопределённой. Можно было бы, между прочим, показать, что свойства прямой на плоскости полностью аналогичны свойствам большого круга на поверхности сферы, и что плоскость и прямая могут быть уподоблены сфере и большому кругу с неопределённо большим радиусом (обычные круги на плоскости тогда являются малыми кругами этой же самой сферы); такое уподобление, чтобы стать строгим, предполагает, между прочим, «переход к пределу», так как очевидно, что, каким бы большим ни становился радиус в своем неопределённом возрастании, мы всегда имеем сферу, а не плоскость, и что такая сфера только стремится к тому, чтобы слиться с плоскостью, а её большие круги — с прямой, таким образом, что плоскость и прямая являются здесь пределами подобно тому, как круг представляет собой предел правильного многоугольника, число сторон которого возрастает до неопределённости. Не настаивая более на этом, мы только заметим, что здесь прямо проявляются сами пределы пространственной неопределённости; следовательно,

как же можно, если желают сохранить некоторую видимость логики, говорить при всем этом о бесконечности?

Если рассматривать положительные и отрицательные числа так, как мы это только что делали, то ряд чисел приобретает следующую форму: -∞ ... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ... +∞, порядок этих чисел будет тот же самый, что и порядок соответствующих точек на прямой, то есть точек, которые имеют те же самые числа в качестве соответствующих коэффициентов, чем, между прочим, и отличается реальное происхождение таким образом сформированного ряда. Этот ряд, хотя он также является неопределённым в двух направлениях, совершенно отличается от того, что мы рассматривали ранее и который включал в себя целые числа и числа, им обратные: он симметричен, но уже не по отношению к 1, а по отношению к 0, который соответствует началу расстояний; и два числа, равноудалённых от этого центрального члена 0, также его воспроизводят, но не посредством умножения, как это было в случае обратных чисел, а посредством «алгебраического» сложения (то есть осуществляемого при учитывании их знаков, что арифметически является здесь вычитанием). С другой стороны, этот новый ряд ни в коей мере не является, как предыдущий, неопределённо возрастающим в одном направлении и неопределённо уменьшающимся в другом, или по крайней мере, если намерены рассматривать его таким образом, то это лишь один из наиболее некорректных способов выражения, который и является тем самым способом, каким рассматриваются числа, «меньшие, чем ноль»; на самом деле он является неопределённо возрастающим в равной мере в двух направлениях, поскольку то, что он включает в себя с одной и с другой стороны от центрального нуля, и есть та же самая последовательность целых чисел; то, что называют «абсолютным значением» (ещё одно по меньшей мере странное выражение, так как то, о чём идёт речь, всегда, по сути дела, является лишь относительным порядком), должно одно лишь приниматься во внимание в чисто количественном отношении, и положи-

тельные или отрицательные знаки ничего в этой связи не меняют, так как они не выражают ничего иного, кроме отношений «положения», которые мы только что объясняли. Неопределенно отрицательное, следовательно, нисколько не уподобляется неопределённо малому; наоборот, оно так же, как неопределённо положительное, уподобляется неопределённо большому; единственное различие в том, что оно разворачивается в другом направлении, что совершенно допустимо, когда речь идёт о пространственных или временных величинах, но полностью лишено смысла для арифметических величин, для которых такое развертывание неизбежно является единственно возможным и не может быть иным, чем развертывание самой последовательности целых чисел.

Среди других странных или нелогичных следствий обозначения отрицательных чисел мы отметим введенное решением алгебраических уравнений рассмотрение так называемых «мнимых» величин, которые Лейбниц, как мы видели, располагает на тех же основаниях, что и бесконечно малые величины, рядом с тем, что он называет «обоснованными фикциями»; эти величины, или называемые таковыми, изображаются как корни отрицательных чисел, что в реальности соответствует лишь чистой невозможности, поскольку будет число положительным или отрицательным, его квадрат всегда неизбежно является положительным в силу правил алгебраического умножения. Даже если можно было бы, придав этим «мнимым» величинам иной смысл, суметь привести их к соответствию чему-то реальному, что мы здесь не рассматриваем, в любом случае можно быть уверенным, что их теория и их применение в аналитической геометрии в том виде, в каком они излагаются современными математиками, является на самом деле лишь переплетением путаницы и нелепостей, а также чем-то вроде продукта потребности в чрезмерных и искусственных обобщениях, потребности, которая не отступает даже перед высказыванием очевидно нелепых предположений; нескольких тео-

рем «асимптот круга», например, было бы достаточно, чтобы доказать, что мы нисколько не преувеличиваем. Можно, правда, сказать, что здесь перед нами не геометрия, собственно говоря, но только, как и при рассмотрении «четвёртого измерения» пространства[118], алгебра, переведенная на геометрический язык; но серьёзно как раз то, почему такой перевод, так же как и перевод в обратном направлении, в некоторой мере возможен и распространен в тех случаях, когда он уже не может иметь никакого значения, так как это одновременно и симптом чрезмерного смешения идей и крайнее выражение «конвенционализма», который в конце концов утрачивает чувство любой реальности.

[118] См.: «Царство количества и знамения времени», главы XVIII и XXIII.

Глава XVII. Изображение равновесия сил

Что касается отрицательных чисел, то хотя это и будет отступление от главной темы нашего исследования, мы поговорим ещё о последствиях, также весьма спорных, использования отрицательных чисел с точки зрения механики; она, между прочим, является на самом деле в силу своего предмета физической наукой, и сам факт, что её считают неотъемлемой частью математики, уже привносит в неё некоторые деформации. Скажем только в связи с этим, что так называемые «принципы», на которых современные математики основывают эту науку, как они её понимают, и которую они совершенно ошибочно называют механикой, — это, собственно говоря, только более или менее обоснованные гипотезы, или же в самом благоприятном случае более или менее общие простые законы, возможно, если угодно, более общие, чем остальные, но которые в любом случае не имеют ничего общего с истинными универсальными принципами и которые в науке, образованной в соответствии с традиционной точкой зрения, самое большее могут быть лишь применением этих принципов к весьма специальной области. Не желая входить в слишком долгие рассуждения, мы обратимся, как к примеру первого случая, к так называемому «принципу инерции», который ничто не обосновывает, ни опыт, наоборот, доказывающий, что в природе нет никакой инерции, ни рассудок, который не может мыслить эту мнимую инерцию, так как она может заключаться лишь в полном отсутствии любых свойств; можно было бы правомерно применить такое слово к чистой потенциальности универсальной субстанции, или *materia prima* схоластов, которая, между прочим, именно по этой причине является, собственно говоря, «непостижимой»; но эта *materia prima*, безуслов-

но, представляет собой нечто иное, чем «материя» физиков[119]. Пример второго случая — это то, что называют «принципом равенства действия и противодействия», который очень мало похож на «принцип», так как он непосредственно выводится из общего закона равновесия природных сил: всякий раз, когда это равновесие каким-либо образом нарушено, оно стремится сразу же восстановиться, откуда противодействие, интенсивность которого эквивалентна интенсивности действия, которое его вызывало; следовательно, здесь перед нами простой частный случай «действий и соответствующих противодействий», который касается не одного только телесного мира, но и всей совокупности проявления во всех его модальностях и всех его состояниях; и именно на этом вопросе о равновесии и его математических изображениях мы предполагаем какое-то время задержаться, так как он сам по себе весьма важен и заслуживает того, чтобы мы на нём в данный момент остановились.

Обычно две силы, которые создают равновесие, изображают двумя противоположными «векторами», то есть двумя отрезками прямой равной длины, но направленными в противоположные стороны: если две силы, приложимые к одной и той же точке, имеют одну и ту же интенсивность и одно и то же направление, но в противоположные стороны, они создают равновесие; поскольку они тогда лишены воздействия на точку приложения, обычно говорят даже, что они уничтожаются, не остерегаясь, что если упраздняется одна из этих сил, то другая сразу действует, что доказывает, что она ни в коей мере не была уничтожена на самом деле. Характеризуются силы числовыми коэффициентами, пропорциональными их соответствующей напряженности, и две силы противоположных направлений отмечаются коэффициентами различных знаков, одна — положительным, а другая — отрицательным: одна будет f, другая $-f'$. В том случае, который мы только что рассматривали, две силы

[119] См.: «Царство количества и знамения времени», глава II.

имели одну и ту же интенсивность, а коэффициенты, которые их характеризовали, должны были быть равными «в абсолютном значении», и мы имели: $f = f'$, откуда выводится в качестве условия равновесия $f - f' = 0$, то есть что алгебраическая сумма двух сил или двух «векторов», которые их изображают, равна нулю, и поэтому равновесие также определяется нулем. Поскольку математики, как мы уже выше говорили, имеют манеру ошибочно рассматривать нуль как разновидность символа ничто (как если бы ничто могло быть чем-то символизировано), из этого, кажется, следует, что равновесие является состоянием несуществования, что является довольно странным выводом; несомненно, именно по этой причине, вместо того чтобы говорить, что две силы, создающие равновесие, нейтрализуют друг друга, что было бы точным, говорят, что они друг друга уничтожают, что противоречит реальности, как мы это только что показали в одном из самых простых замечаний.

Истинное понятие равновесия совершенно иное: чтобы осмыслить его, достаточно заметить, что все природные силы (и не только механические, которые, повторим, есть не что иное, как частный случай, но и как силы тонкого порядка, так и силы порядка телесного) являются либо притягательными либо отталкивающими; первые могут рассматриваться как силы сжимающие или как силы сжатия, вторые — как силы расширяющие или как силы расширения[120]; и в сущности, здесь перед нами не что иное, как выражение, в этой области, самой фундаментальной космической двой-

[120] Если рассматривать обычное понятие центробежных и центростремительных сил, то можно без труда убедиться, что первые сводятся к силам расширения, а вторые — к силам сжатия; кроме того, сила тяготения подобна силе расширения, поскольку она проявляется исходя из своей точки приложения, а сила импульса или удара подобна силе сжатия, поскольку она, наоборот, применяется будучи направленной к той же самой точке приложения; но если бы они рассматривались по отношению к точке их эмиссии, то было бы верно обратное, чего, между прочим, и требует закон полярности. — В другой области герметические «свертывание» и «растворение» также соответствуют сжатию и расширению.

ственности. Легко понять, что в изначально однородной среде любому сжатию, производимому в одной точке, будет неизбежно соответствовать в другой точке эквивалентное расширение, и наоборот, так что всегда следует рассматривать соответственно два центра сил, один из которых не может существовать без другого; здесь перед нами то, что можно назвать законом полярности, который применим ко всем природным феноменам, потому что он исходит из двойственности самих принципов, руководящих любым проявлением; этот закон в той специальной области, которой занимаются физики, прежде всего очевиден в электрических и магнетических феноменах, но ими он не ограничивается. Если теперь две силы, одна сжимающая, а другая расширяющая, воздействуют на одну и ту же точку, то условием, при котором они создают равновесие или нейтрализуют друг друга, то есть при котором в этой точке не происходит ни сжатия, ни расширения, является то, что интенсивности этих двух сил будут эквивалентными; мы не говорим равными, так как это силы различных видов, и речь, между прочим, идёт на самом деле о качественном, а не о простом количественном различии. Можно характеризовать эти силы коэффициентами, пропорциональными тому сжатию или расширению, которые они производят, и поэтому, если рассматривать сжимающую силу и силу расширяющую, то первая будет отмечена коэффициентом 1, а вторая — коэффициентом $n' < 1$; каждый из этих коэффициентов может быть отношением плотности, которую приобретает окружающая среда в рассматриваемой точке, под воздействием соответствующей силы, к изначальной плотности той же самой среды, предполагаемой однородной, когда она не подвержена воздействию иной силы, в силу простого применения принципа достаточного основания[121]. Когда не происхо-

[121] Подразумевается, что когда мы говорим о принципе достаточного основания, мы рассматриваем его только сам по себе, вне всех тех специализированных и более-менее спорных форм, которые Лейбниц или другие желали ему придать.

дит ни сжатия, ни расширения, это отношение является неизбежно равным единице, поскольку плотность среды не меняется; чтобы две силы, действующие в одной точке, создали равновесие, необходимо, следовательно, чтобы их равнодействующая имела коэффициент, равный единице. Легко увидеть, что коэффициент этой равнодействующей является произведением (а уже не суммой как в обычной «классической» концепции) коэффициентов двух рассматриваемых сил; эти два коэффициента n и n' должны быть, следовательно, двумя числами, обратными друг другу: $n' = 1/n$ и у нас будет условие равновесия: $nn' = 1$; таким образом, равновесие будет определяться уже не нулем, но единицей[122].

Очевидно, что такое определение равновесия посредством единицы, являющееся единственным реальным, соответствует тому факту, что единица занимает середину в двойной неопределённой последовательности целых чисел и чисел, обратных им, тогда как это центральное место в каком-то отношении узурпировано нулем в искусственно созданной последовательности положительных и отрицательных чисел. Вовсе не являясь состоянием небытия, равновесие, наоборот, представляет собой бытие, рассматриваемое само по себе, независимо от его вторичных множественных проявлений; подразумевается, впрочем, что это вовсе не Не-Сущее в метафизическом смысле этого слова, так как бытие, даже в примордиальном и недифференцированном состоянии, является ещё лишь исходной точкой всех дифференцированных проявлений, подобно тому как единица есть исходная точка всего множества чисел. Эта единица, какой мы её только что рассматривали, и в которой коренится равновесие, представляет собой то, что дальневосточная традиция называет «Неизменной Серединой»; и согласно той же самой традиции это равновесие или эта гармония

[122] Такая формулировка точно соответствует концепции равновесия двух взаимодополнительных принципов *ян* и *инь* в дальневосточной космологии.

в центре каждого состояния и каждой модальности существа является «Деянием Неба».

Глава XVIII. Переменные и постоянные величины

Вернёмся теперь к вопросу об обосновании строгости исчисления бесконечно малых: мы уже видели, что Лейбниц рассматривает как равные те величины, разность которых, не будучи нулевой, несравнима с самими этими величинами; иными словами, бесконечно малые величины, которые не являются *nihila absoluta*, являются тем не менее *nihila respective*, и ими, как таковыми, следует пренебрегать с точки зрения обычных величин. К несчастью, понятие «несравнимых» остается слишком неточным, чтобы доказательство, опирающееся лишь на это понятие, могло быть полностью достаточным, чтобы установить строгий характер исчисления бесконечно малых; в этом аспекте исчисление предстаёт в конечном счёте лишь как метод неопределённого приближения, и мы не можем вместе с Лейбницем сказать, что «когда это установлено, следует не только, что ошибка является бесконечно малой, но что она полностью ничтожна»[123]; но не было ли иного более строгого средства, чтобы прийти к такому заключению? Мы должны допустить в любом случае, что ошибка, допущенная в расчётах, может стать насколько угодно малой, чего уже немало; но разве устраняет её полностью, или как раз этот бесконечно малый характер ошибки, когда она рассматривается уже не в ходе самих вычислений, но в результатах, к которым они позволяют в конечном счёте прийти?

Бесконечно малая разность, то есть до неопределённости уменьшающаяся, может быть лишь разностью двух переменных величин, так как очевидно, что разность двух посто-

[123] Фрагмент, датированный 26 марта 1676 г.

янных величин может быть сама только постоянной величиной; рассмотрение бесконечно малой разности между двумя постоянными величинами не имеет, следовательно, никакого смысла. Теперь мы имеем право сказать, что две постоянные величины «являются строго равными между собой, если только их так называемая разность может предполагаться насколько угодно малой»[124]; «исчисление бесконечно малых, как и обычное вычисление, реально имеет в виду лишь постоянные и определённые величины»[125]; оно в конечном счёте вводит переменные величины лишь в ранге вспомогательных, в их чисто переходном характере, и эти переменные должны исчезнуть из результатов, которые могут выражать лишь отношения между постоянными величинами. Необходимо, следовательно, чтобы получить эти результаты, перейти от рассмотрения переменных величин, к рассмотрению величин постоянных; и этот переход как раз и имеет следствием устранение бесконечно малых величин, которые, по сути дела, являются переменными и которые могут изображаться лишь как разности между переменными величинами.

Легко понять теперь, почему Карно в том определении, которое мы ранее цитировали, настаивает на свойстве, которое имеют бесконечно малые величины, какими они используются в вычислении, — считаться насколько угодно малыми «без того, чтобы мы были для этого обязаны изменять величины, отношение которых мы ищем». Дело в том, что эти последние должны быть в реальности постоянными величинами; верно, что они рассматриваются при вычислении как пределы переменных величин, но эти последние играют лишь простую вспомогательную роль так же, как и бесконечно малые величины, которые они вводят вместе с собой. Ключевой момент для обоснования строгости исчисления бесконечно малых заключается в том, что в ре-

[124] Карно Л. «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых», стр. 29.

[125] Фрейсине Ш. де. «Об анализе бесконечно малых». Предисловие. С. VIII.

зультатах должны фигурировать лишь постоянные величины; в конечном счёте необходимо при завершении вычислений перейти от переменных величин к величинам постоянным, и это и есть «переход к пределу», но понимаемый совершенно иначе, чем это делает Лейбниц, поскольку он не является следствием или «окончательным завершением» самого изменения; таким образом, и это здесь важно, бесконечно малые величины при этом переходе сами собой устраняются, и происходит это просто в силу замены переменных величин величинами постоянными[126].

Следует ли видеть в таком устранении, как того желал Карно, лишь следствие простой «компенсации ошибки»? Мы так не думаем, и кажется, в реальности можно было бы увидеть в этом нечто большее ввиду того, что делается различие переменных величин и величин постоянных, как образующих в каком-то отношении две отдельные области, между которыми существует, несомненно, соответствие и аналогия, что, впрочем, необходимо для того, чтобы можно было действительно перейти от одного к другому, каким бы способом ни осуществлялся этот переход, но без того, чтобы их реальные отношения могли когда-нибудь установить между ними взаимопроникновение или даже некоторую непрерывность; это, между прочим, подразумевает между этими двумя видами величин различие исключительно качественного порядка в соответствии с тем, что мы говорили выше по поводу понятия предела. Именно этого различия Лейбниц никогда отчётливо не делал, и здесь так

---

[126] См.: Фрейсине Ш. де. Там же. «Уравнения, называемые Карно "несовершенными", являются, собственно говоря, уравнениями отложенными или переходными, которые являются строгими лишь постольку, поскольку их будут использовать при вычислении пределов, и которые были бы, наоборот, абсолютно неточными, если пределы не должны быть приняты в действительности. Достаточно иметь представленное уму действительное предназначение вычислений, чтобы не испытывать никаких сомнений в значении отношений, через которые переходят, и необходимо видеть в каждом из них не то, что оно могло бы действительно выражать, но то, что оно будет выражать позже, когда будут приняты пределы».

же, несомненно, ему помешала его концепция универсально применимой непрерывности. Однако как раз одно лишь это различие позволяет нам сформулировать следующее предположение: если разность двух переменных величин может сделаться насколько угодно малой, то постоянные величины, которые соответствуют этим переменным и которые рассматриваются как их соответствующие пределы, являются строго равными. Таким образом, бесконечно малая разность никогда не может стать нулевой, но она может существовать лишь между переменными, а между соответствующими постоянными величинами разность должна быть нулевой; отсюда непосредственно следует, что ошибке, которая может сделаться насколько угодно малой в области переменных величин, где действительно, в силу самого характера этих величин, не может быть и речи ни о чём, кроме неопределённого приближения, — этой ошибке неизбежно соответствует строго нулевая ошибка в области постоянных величин; и только в одном этом, а не в других доводах, которые, какими бы они ни были, всегда в той или иной мере находятся вне или в стороне от вопроса, и заключается, в сущности, истинное обоснование строгости исчисления бесконечно малых.

Глава XIX. Последовательные дифференцирования

Все предшествующее ещё сохраняет одно затруднение, касающееся различных порядков бесконечно малых величин: как можно понять величины, которые являются бесконечно малыми не только по отношению к обычным величинам, но и по отношению к другим величинам, которые и сами являются бесконечно малыми? Здесь Лейбниц также прибегает к понятию «несравнимых», но это понятие довольно туманное для того, чтобы мы могли им удовлетвориться, и оно не объясняет в достаточной мере возможность последовательных дифференциаций. Несомненно, эту возможность можно лучше понять благодаря одному сравнению или примеру, взятому из механики: «Что касается *d d x*, они относятся к *d X*, как *conatus* силы тяготения или центробежные силы к скорости»[127]. И Лейбниц развивает эту идею в своем ответе на возражения голландского математика Ньювентейта, который, полностью допуская дифференциалы первого порядка, утверждал, что дифференциалы высших порядков могут быть лишь нулевыми: «Обычная величина, первичная или дифференциальная бесконечно малая величина, и дифферентно-дифференциальная или вторичная бесконечно малая величина, соотносятся между собой как движение, скорость и напряжение, которое является элементом скорости[128]. Движение описывает линию, скорость

[127] Письмо Гюйгенсу от 1-2 октября 1693 г.

[128] Это «напряжение» — это то, что обычно обозначается названием «ускорение».

элемент линии, а ускорение — элемент элемента»[129]. Но это лишь пример или частный случай, который в итоге может служить лишь простой «иллюстрацией», а не аргументом, и необходимо предоставить обоснование общего порядка, которое этот пример в каком-то смысле, содержит в себе имплицитно.

На самом деле дифференциалы первого порядка изображают возрастания, или лучше изменения, поскольку они также могут относиться, в зависимости от случая, как к возрастающему, так и к уменьшающемуся направлению, которые в каждый момент приобретают обычные величины: такова скорость по отношению к пространству, преодолеваемому в каком-либо движении. Таким же образом дифференциалы определённого порядка изображают мгновенные изменения дифференциалов предшествующего порядка, взятые в свою очередь как величины, существующие в некотором интервале: таково ускорение по отношению к скорости. Именно на этом рассмотрении различных степеней изменения, а не величин, несравнимых между собой, и основывается на самом деле различие различных порядков бесконечно малых величин.

Чтобы уточнить способ, каким это следует понимать, мы просто сделаем следующее замечание: можно установить, наряду с самими переменными, различия, аналогичные тем, что мы установили ранее между постоянными и переменными величинами; при таких условиях, если вновь обратиться к определению Карно, величина будет называться бесконечно малой по отношению к другим, когда можно будет сделать её насколько угодно малой, «без необходимости для этого изменять эти другие величины». Дело в том, что величина, которая не является абсолютно неизменной, или даже которая, в сущности, является переменной, что мы и имеем в случае с бесконечно малыми, к какому бы порядку они ни относились, может тем не менее рассматриваться

[129] Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Nieuwentijt circa Methodum differentiatem seu infinitesimalem motas // Acta Eruditorum. Leipzig, 1695.

как относительно постоянная и определённая, то есть как способная играть роль постоянной величины по отношению к некоторым другим переменным. Только при таких условиях одна переменная величина может рассматриваться как предел другой переменной, что, согласно самому определению предела, предполагает, что она рассматривается как постоянная по меньше мере в некотором отношении, то есть относительно величины, для которой она является пределом; наоборот, величина может быть переменной не только сама по себе или, что то же самое, по отношению к абсолютно постоянным величинам, но также и по отношению к другим переменным, поскольку эти последние могут рассматриваться как относительно постоянные.

Вместо того чтобы говорить в этой связи о степенях изменения, как мы только что это делали, можно также говорить и о степенях неопределённости, что, по сути дела, будет в точности то же самое, рассматриваемое только с несколько иной точки зрения: величина, хотя и неопределённая по своей природе, может тем не менее быть определённой в относительном смысле благодаря введению некоторых гипотез, которые допускают в то же самое время существование неопределённости других величин; эти последние поэтому, если можно так сказать, являются более неопределёнными, чем другие, или неопределёнными в высшей степени, и таким образом они имеют к ним отношение, сравнимое с тем, которое неопределённые величины имеют с подлинно определёнными величинами. Мы ограничимся этими несколькими указаниями по данному поводу, так как какими бы краткими они ни были, мы считаем, что их по меньшей мере достаточно, чтобы понять возможность существования дифференциалов различных последовательных порядков; но нам остается ещё в связи с тем же самым вопросом показать более ясно, что на самом деле нет никакого логического затруднения для того, чтобы рассматривать множественные степени неопределённости, как в порядке уменьшающихся величин, к которым и относятся бесконечно малые или диф-

ференциалы, так и в порядке возрастающих величин, где можно рассматривать также интегралы различных порядков, симметричные в некотором роде последовательным дифференциалам, что, между прочим, соответствует взаимосвязи, существующей, как мы объясняли, между неопределённо возрастающим и неопределённо уменьшающимся. Разумеется, именно о степенях неопределённости здесь речь и идёт, а не «степенях бесконечности», как их понимает Жан Бернулли, концепцию которого в этом отношении Лейбниц так и не осмелился ни принять, ни полностью отвергнуть; и этот случай также из числа тех, где оказывается, что затруднения непосредственно разрешаются заменой понятия мнимой бесконечности понятием неопределённости.

Глава XX. Различные порядки неопределённости

Логические трудности и даже противоречия, с которыми сталкиваются математики, когда рассматривают «бесконечно большие» или «бесконечно малые» величины, различающиеся между собой и даже принадлежащие к различным порядкам, происходят исключительно от того, что они рассматривают как бесконечное то, что является просто неопределённым: верно, что вообще говоря, они довольно мало занимаются этими трудностями, но эти трудности тем не менее существуют и являются поэтому серьёзными, они создают представление об этой науке как о наполненной скоплением нелогичностей, или, если угодно, «паралогизмами», лишающими её всякой ценности и всякого значения в глазах тех, кто не позволяет вводить себя в заблуждение словами. Вот несколько примеров противоречий, порождаемых теми, кто допускает существование бесконечных величин, когда речь идёт о применении этого понятия к геометрическим величинам: если рассматривается линия, например, прямая, как бесконечная, то эта бесконечность должна быть меньшей и даже бесконечно меньшей, чем та, что образована площадью, такой, как плоскость, в которой эта линия содержится вместе с бесконечным числом других, и эта вторая бесконечность в свою очередь будет бесконечно меньшей, чем бесконечность трехмерного пространства. Самой возможности сосуществования всех этих мнимых бесконечностей, часть которых имеют одну и ту же степень, а другие — различные степени, должно быть достаточно, чтобы доказать, что ни одна из них не может быть истинной бесконечностью даже без обращения к чисто метафизическому порядку; на самом деле, повторим ещё раз, так как это истины, на которых никогда не помешает лишний раз остано-

виться, очевидно, что если предполагается множество различных бесконечностей, каждая из них оказывается ограниченной другими, что значит, что они исключают друг друга. Правду сказать, «инфинитисты», у которых это чисто словесное накопление «бесконечности бесконечностей» происходит как разновидность «умственной интоксикации», если позволено так выразиться, ни в коей мере не отступают перед подобными противоречиями, поскольку, как мы уже говорили, они не испытывают никакого затруднения допустить, что имеются различные бесконечные числа, и что, как следствие, одна бесконечность может быть большей или меньшей, чем другая бесконечность; но абсурдность таких выражений является слишком очевидной, и тот факт, что довольно часто используются у современных математиков, ничего не меняет, но только доказывает, до какой степени самый элементарный логический смысл утрачен в нашу эпоху.

Другое противоречие, не менее явное, чем предшествующие, — это противоречие, возникающее в случае замкнутой площади, то есть очевидно и явно конечной, которая тем не менее должна содержать в себе бесконечность линий, как например сфера содержит в себе бесконечность кругов; перед нами здесь конечное содержание, содержимое которого является бесконечным, что, впрочем, имеет место, когда выдвигают, как это делает Лейбниц, утверждение об «актуальной бесконечности» непрерывной совокупности элементов. Напротив, нет никакого противоречия в допущении сосуществования неопределённых множеств различных порядков: таким образом, линия, неопределённая в одном-единственном измерении, может рассматриваться в этой связи как образующая простую неопределённость или неопределённость первого порядка; площадь, неопределённая в двух измерениях, будет тогда неопределённостью второго порядка, а трехмерное пространство, которое может включать в себя неопределённость неопределённых площадей, будет уже неопределённостью третьего порядка. Важно здесь ещё отме-

тить, что мы утверждаем, что площадь включает в себя неопределённость линий, а не то, что она образована неопределённостью линий, так же как линия не состоит из точек, но включает в себя их неопределённое множество; таким же образом дело обстоит и с объемом по отношению к площадям, так как само трехмерное пространство есть не что иное, как неопределённый объем. Здесь, между прочим, перед нами, по сути дела, то о чём мы уже говорили выше по поводу «неделимых» и «состава непрерывности»; вопросы такого рода в силу самой их сложности относятся к числу тех, что заставляют лучше почувствовать необходимость строгого языка. Добавим также в связи с этим, что если с определённой точки зрения правомерно рассматривать линию как порожденную точкой, площадь как порожденную линией, а объем как порожденный площадью, то это, в сущности, предполагает, что такая точка, такая линия или такая площадь перемещаются посредством непрерывного движения, включающего в себя неопределённость последовательных позиций; и совершенно другое дело рассматривать эти позиции, взятые отдельно, друг за другом, то есть точки, линии и площади, рассматриваемые как постоянные и определённые, как образующие соответственно стороны или элементы линии, площади или объема. Кроме того, когда в обратном направлении рассматривают площадь как пересечение двух объемов, линию как пересечение двух площадей и точку как пересечение двух линий, то очевидно, что такие пересечения ни в коей мере не следует понимать как общие стороны этих объемов, этих площадей или этих линий; они, как говорит об этом Лейбниц, являются только или пределами, или границами.

Согласно тому, что мы только что сказали, каждое измерение вводит в каком-то роде новую степень неопределённости в протяженность, то есть в пространственную непрерывность, рассматриваемую как способную до неопределённости возрастать в широту, и поэтому получается то, что можно назвать последовательными степенями неопре-

делённого[130]; и можно сказать также, что неопределённость некоторого порядка или некоторой степени содержит неопределённое множество неопределённостей низшего порядка или меньшей степени. Пока имеется в виду только неопределённость, все эти рассуждения и рассуждения такого же рода остаются, собственно говоря, совершенно приемлемыми, так как нет никакой логической несовместимости между множественными различными неопределённостями, которые, будучи неопределёнными, имеют тем не менее конечную, в сущности, природу и поэтому вполне способны сосуществовать, как такие же частные и определённые возможности внутри общей возможности, которая одна только и является бесконечной, потому что она тождественна универсальному целому[131]. Те же самые рассуждения принимают невозможную и абсурдную форму благодаря одному лишь смешению неопределённого с бесконечным; таким образом это ещё один из тех случаев, где, как и когда речь шла о «бесконечном множестве», противоречие, внутренне присущее так называемой определённой бесконечности, скрывает, искажая её до неузнаваемости, другую идею, которая сама по себе совершенно не противоречива.

Мы только что говорили о различных степенях неопределённости величин в возрастающем направлении; посредством того же самого понятия, рассматриваемого в убывающем направлении, мы уже обосновали выше рассмотрение различных порядков бесконечно малых величин, возможность которых ещё легче понять, наблюдая уже указанное нами соответствие между неопределённо возрастающим и неопределённо уменьшающимся. Среди неопределённых величин различных порядков величины иного порядка, нежели первый, всегда являются неопределёнными по отношению к величинам предшествующих порядков, как и по отношению к обычным величинам; столь же правомерно

---

130 См.: «Символизм креста», глава XII.

131 См.: «Множественные состояния существа», глава I.

рассматривать в обратном направлении бесконечно малые величины различных порядков, причём величины каждого порядка будут бесконечно малыми не только по отношению к обычным величинам, но также и по отношению к бесконечно малым величинам предшествующих порядков[132]. Нет абсолютной разнородности между неопределёнными величинами и величинами обычными, и уж тем более её нет между ними и бесконечно малыми; в конечном счёте здесь есть лишь различия в степени, а не различия в природе, поскольку в реальности рассмотрение неопределённого, какого бы порядка или какой бы степени оно ни было, никогда не выводит нас за пределы конечного; как раз ложная концепция бесконечности и вводит, по видимости, между этими различными порядками величин радикальную разнородность, которая, по сути дела, совершенно непостижима. Упраздняя эту разнородность, мы устанавливаем здесь разновидность непрерывности, но совершенно отличную от той, которую Лейбниц усматривал между переменными и их пределами, и гораздо лучше обоснованную в реальности, так как различие переменных величин и величин постоянных, наоборот, подразумевает одно лишь истинное различие в природе.

При таких условиях и сами обычные величины могут, по крайней мере когда речь идёт о переменных, рассматри-

[132] Мы сохраняем, как это обычно и делают, наименование «бесконечно малые» для величин, уменьшающихся до неопределённости, за исключением величин, до неопределённости возрастающих, которые ради краткости мы можем называть просто «неопределёнными»; довольно странно, что Карно объединил и то и другое под одним и тем же названием «бесконечно малых», что противоречит не только использованию, но и самому смыслу, который этот термин получает при своем образовании. Полностью сохраняя слово «бесконечно малые», определив его значение так, как мы это сделали, мы не можем, впрочем, не заметить, что этот термин имеет тот серьёзный недостаток, что он происходит, очевидно, от слова «бесконечность», что очень мало соответствует той идее, которую он реально выражает; чтобы суметь использовать его без неудобств, необходимо в некотором роде позабыть о его происхождении, или по крайней мере приписывать ему один только «исторический» характер, как фактически вытекающий из той концепции «обоснованных фикций», которую создал Лейбниц.

ваться в каком-то отношении как бесконечно малые по отношению к неопределённо возрастающим величинам, так как если одна величина может стать сколь угодно большой по отношению к другой, то последняя, наоборот, тем самым становится насколько угодно малой по отношению к первой. Мы вводим такое ограничение, что речь здесь должна идти о переменных, потому что бесконечно малую величину следует всегда понимать в сущности, как переменную и потому, что здесь перед нами нечто действительно присущее самой её природе; впрочем, величины, принадлежащие двум различным порядкам неопределённости, неизбежно являются переменными по отношению друг к другу, и это свойство относительной и взаимной переменности совершенно симметрично, так как согласно тому, что мы только что сказали, одно и то же значение имеет рассмотрение одной величины как до неопределённости возрастающей по отношению к другой, или этой последней как до неопределённости уменьшающейся по отношению к первой; без этой относительной переменности нет ни неопределённого возрастания, ни неопределённого уменьшения, но только определённые отношения между двумя величинами.

Точно так же, когда имеет место изменение положения между двумя телами A и B, одно и то же значение, по крайней мере поскольку рассматривается лишь само это изменение, имеет утверждение, что тело A находится в движении по отношению к телу B, или, наоборот, тело B находится в движении по отношению к телу A; понятие относительного движения симметрично в этом отношении не меньше, чем относительная изменчивость, которую мы здесь рассматривали. Именно поэтому, следуя Лейбницу, который тем самым доказывал недостаточность картезианского механицизма как физической теории, стремящейся предоставить объяснение природных феноменов, нельзя установить различие между состоянием движения и состоянием покоя, если ограничиваться одним лишь рассмотрением изменений положения; для этого необходимо вмешательство ка-

кой-то вещи иного порядка, а именно понятия силы, которая является ближайшей причиной этих изменений и которая одна лишь может быть приписана, скорее, одному телу, чем другому, как позволяющая обнаружить в этом теле и только в нём одном истинную причину изменения[133].

[133] См.: Лейбниц Г. В. Ф., «Рассуждения о метафизике», т. 1, гл. XVIII, стр. 125-163; «Царство количества и знамения времени», М., 1994, гл. XIV.

Глава XXI. Неопределённое является аналитически неисчерпаемым

В двух случаях, которые мы только что рассматривали, в случае с неопределённо возрастающим и неопределённо уменьшающимся одна величина определённого порядка может рассматриваться как сумма неопределённого числа элементов, каждый из которых является бесконечно малой величиной по отношению к этой сумме. Чтобы было можно говорить о бесконечно малых величинах, необходимо, чтобы речь шла об элементах, не определённых по отношению к их сумме, и так же обстоит дело, когда эта сумма является неопределённой по отношению к элементам, о которых идёт речь; это непосредственно следует из сущности характера самого неопределённого, поскольку оно неизбежно подразумевает, как мы об этом говорили, идею «становления» и, следовательно, некоторой неопределённости. Между прочим, подразумевается, что такая неопределённость может быть лишь относительной и существующей лишь с определённой точки зрения или по отношению к какой-то определённой вещи: таков, например, случай суммы, которая, будучи обычной величиной, является неопределённой не сама по себе, а только по отношению к своим бесконечно малым элементам; но в любом случае, если бы это было иначе и если бы мы не вводили это понятие неопределённости, то мы просто вернулись бы к концепции «несравнимых», истолковываемой в грубом смысле песчинки по отношению к земле, и земли по отношению к небосводу.

Сумма, о которой мы здесь говорим, ни в коей мере не может быть получена по способу арифметической суммы, потому что для этого было бы необходимо, чтобы неопределённый ряд последовательных добавлений был бы завер-

шен, что является противоречивым; в случае, когда сумма является обычной величиной, определённой в качестве таковой, очевидно, необходимо, как мы уже говорили, формулируя определение интегрального числения, чтобы число, или, скорее, множество элементов возрастало до неопределённости в то же самое время, когда величина каждого из них до неопределённости уменьшается, и в этом смысле неопределённость этих элементов действительно является неисчерпаемой. Но если эта сумма не может быть получена таким способом, как окончательный результат множества различных и последовательных операций, она может быть наоборот, получена сразу же и посредством одной-единственной операцией, которой является интегрирование[134]; это операция, обратная дифференцированию, поскольку она восстанавливает сумму исходя из её бесконечно малых элементов, тогда как дифференцирование, наоборот, идёт от суммы к элементам, обеспечивая средство сформулировать закон мгновенных изменений величины, выражение которой заранее дано.

Таким образом, как только речь идёт о неопределённости, понятие арифметической суммы более неприменимо, и необходимо прибегнуть к понятию интегрирования, чтобы восполнить невозможность «вычислить» бесконечно малые элементы, невозможность, которая, разумеется, следует из самой их природы, а не из какого-то несовершенства с нашей стороны. Мы можем мимоходом отметить, что в этом и заключается, что касается применения геометрических величин, которые, между прочим, по сути дела, являются истинным основанием любого исчисления бесконечно малых,

[134] Термины «интеграл» и «интегрирование», использование которых было преобладающим, принадлежат не Лейбницу, а Жану Бернулли; Лейбниц в этом смысле пользовался лишь словами «сумма» и «суммирование», которые имеют то неудобство, что они, кажется, указывают на подобие между операцией, о которой идёт речь, и образованием арифметической суммы; мы, впрочем, говорим только «кажется», так как верно, что существенное различие этих двух операций не могло на самом деле остаться незамеченным для Лейбница.

метод измерения, полностью отличный от обычного метода, основанного на разделении величины на определённые доли, о котором ранее мы говорили в связи с «единицами измерения». Этот последний всегда в итоге означает замену каким-либо образом дискретного на непрерывное, посредством того «разрезания» на доли, равные величине того же вида, принятой за единицу[135], с целью суметь применить непосредственно число к измерению непрерывных величин, что может на самом деле произойти лишь при таком изменении их природы, которое сделает их подобными природе числа. Наоборот, другой метод следует, насколько это возможно, характеру, свойственному непрерывному, рассматривая его как сумму элементов, уже не постоянных и определённых, но, в сущности, переменных и способных уменьшаться в своем изменении ниже всякой значимой величины, и позволяя тем самым изменять пространственную величину между сколь угодно сближаемыми пределами, что является, принимая в расчёт природу числа, которая, несмотря ни на что, не может меняться, наименее несовершенным представлением, которое можно составить о непрерывном изменении.

Эти наблюдения позволяют понять более точным способом, в каком смысле можно говорить, как мы это уже делали вначале, что пределы неопределённого никогда не могут быть достигнуты посредством аналитической процедуры, или, другими словами, что неопределённое является не абсолютно и никоим образом неисчерпаемым, но по меньшей мере неисчерпаемым аналитически. Мы, естественно, должны в этой связи рассматривать как аналитическую ту процедуру, которая, чтобы восстановить целое, заключалась бы в том, чтобы брать его элементы раздельно и последовательно: такова процедура образования арифметической суммы,

[135] Или дроби этой величины, но незначительной, так как эта дробь образует тогда вторичную меньшую единицу, которая заменяется на первую, в случае, когда деление на неё не получается точным, с целью достичь точного или по меньшей мере более близкого результата.

и именно в этом от неё интегрирование, в сущности, и отличается. Это особенно интересно с нашей точки зрения, так как очевидно благодаря весьма ясному примеру, чем являются истинные отношения анализа и синтеза: вопреки обычному мнению, согласно которому анализ был в каком-то роде подготовкой к синтезу и приводил бы к нему, так что всегда следовало бы начинать с анализа, даже когда мы не намерены к нему обращаться, истина в том, что мы никогда не сможем на самом деле дойти до синтеза, исходя из анализа; всякий синтез в истинном смысле этого слова является, так сказать, чем-то непосредственным, чему не предшествует никакой анализ и от которого он полностью независим, как и интегрирование является операцией, которая осуществляется сразу же и которая ни в коей мере не предполагает рассмотрения элементов, сравнимых с элементами арифметической суммы; и подобно тому, как арифметическая сумма не может дать средство достичь и исчерпать неопределённое, так и во всех областях есть вещи, которые в силу своей природы сопротивляются всякому анализу и познание которых возможно лишь благодаря одному только синтезу[136].

[136] Здесь и в том, что последует, должно быть понятно, что мы принимаем термины «анализ» и «синтез» в их истинном и оригинальном значении, что необходимо позаботиться о том, чтобы отличать от того совершенно отличного и несвойственного им значения, в котором обычно говорят о «математическом анализе», и согласно которому само интегрирование, несмотря на свой, в сущности, синтетический характер, рассматривается как являющееся частью того, что называется «анализом бесконечно малых»; между прочим, именно по этой причине мы предпочитаем избегать использования этого последнего выражения, и мы используем только выражения «исчисление бесконечно малых» и «метод бесконечно малых», которые по крайней мере не дают повода никакой двусмысленности такого рода.

Глава XXII. Синтетический характер интегрирования

В противоположность образованию арифметической суммы, которая, как мы только что сказали, имела, собственно говоря, аналитический характер, интегрирование должно рассматриваться как операция, в сущности, синтетическая, в том, что она одновременно охватывает все элементы суммы, которые следует сосчитать, сохраняя между ними ту «безразличность», которая соответствует частям содержания, поскольку эти части, вследствие самой природы содержания, не могут быть чем-то неизменным и определённым. Та же самая «безразличность» должна, между прочим, в равной мере поддерживаться, хотя и по несколько иной причине, в отношении дискретных элементов, которые образуют неопределённый ряд, когда желают подсчитать его сумму, так как, если величина каждого из этих элементов мыслится тогда как определённая, их число таковым не является, и мы можем даже сказать точнее, что их множество превосходит всякое число; и тем не менее имеется случай, когда сумма элементов такого ряда стремится к некоторому определённому пределу, когда их множество возрастает до неопределённости. Можно было бы сказать, хотя такой способ высказываться покажется, возможно, немного странным на первый взгляд, что такой дискретный ряд является неопределённым в силу «экстраполяции», тогда как непрерывная совокупность — в силу «интерполяции»; то, что мы хотим этим сказать, так это то, что если взять в дискретном ряду один отрезок, расположенный между двумя какими-либо членами, то в нём нет ничего неопределённого, и такой отрезок является определённым одновременно и в целом, и в своих элементах, но как раз в силу того, что, выходя за

пределы этого отрезка, мы никогда не дойдем до последнего члена, этот ряд является неопределённым; напротив, в непрерывной совокупности, определённой в качестве таковой, именно внутрь самой этой совокупности неопределённое оказывается включенным, потому что элементы не являются определёнными и потому что, поскольку непрерывное всегда делимо, в нём нет последних элементов; таким образом, в этом отношении, эти два случая в каком-то роде являются обратными друг другу. Суммирование неопределённого числового ряда никогда не завершается, если все члены следует брать по одному, поскольку нет последнего члена, которым этот ряд мог бы завершиться; в случае, когда такое суммирование возможно, оно, следовательно, может быть получено лишь посредством синтетической процедуры, которая заставляет нас в каком-то роде улавливать сразу же всю неопределённость, рассматриваемую в целом, и это ни в коей мере не предполагает отдельного рассмотрения её элементов, которое, между прочим, невозможно в силу того, что их неопределённое множество. Более того, когда неопределённый ряд дан нам имплицитно, в силу закона его образования, пример чего мы видели в случае последовательности целых чисел, мы можем сказать, что он нам дан в целом синтетически, и он не может быть дан иначе; на самом деле задать такой ряд аналитически значило бы задать отдельно все его члены, что является невозможным.

Следовательно, когда нам приходится рассматривать какую-либо неопределённость, будь это неопределённость дискретной совокупности или неопределённость дискретного ряда, следует во всех случаях прибегать к синтетической операции, чтобы суметь достичь пределов; постепенная прогрессия была бы здесь безрезультатной и никогда не смогла бы для нас завершиться, так как такая прогрессия может завершиться последним членом лишь при двойном условии, что этот член и число степеней, необходимых для его достижения, были бы оба определёнными. Именно по-

этому мы не говорили, что пределы неопределённого не могут быть никоим образом достигнуты, и эта невозможность была бы необоснованной ввиду того, что такие пределы существуют, но только они не могут быть достигнуты аналитически; неопределённость не может быть исчерпана степенями, но она может быть включена в свою совокупность посредством одной из тех трансцендентных операций, интегрирование которых даёт нам образец в математическом порядке. Можно заметить, что прогрессия степеней соответствовала бы здесь самому изменению величины, непосредственно в случае дискретных рядов, а что касается непрерывного изменения, то оно следует ей в той мере, в какой это позволяет дискретная природа числа; наоборот, посредством синтетической операции, мы располагаемся непосредственно вне и за пределами изменения, как это неизбежно и должно быть, согласно тому, что мы уже говорили выше, чтобы «переход к пределу» мог быть действительно осуществлен; другими словами, анализ достигает лишь переменных, взятых в самом ходе их изменения, и только один синтез достигает их пределов, что здесь является единственным в своем роде окончательным и реально значительным результатом, поскольку необходимо, чтобы можно было говорить о результате, прийти к чему-то такому, что было бы связано исключительно с определёнными и постоянными величинами.

Подразумевается, между прочим, что можно обнаружить аналогию этих синтетических операций и в иных областях, чем область количества, так как ясно, что идея неопределённого развития возможностей применима также и к чему-то совершенно иному, чем количество, например к какому-либо состоянию проявленного бытия и к условиям, какими бы они ни были, которым это бытие подчинено, рассматривается ли при этом весь космос в целом или какое-то существо в частности, то есть располагаемся ли мы на «макрокосмической» точке зрения или на точке зрения «микрокосми-

ческой»[137]. Можно сказать, что здесь «переход к пределу» соответствует окончательной фиксации результатов проявления в порядке принципов; только благодаря этому на самом деле существо окончательно избегает изменения или «становления», которое неизбежно присуще всякому проявлению как таковому; очевидно, потому, что такая фиксация никоим образом не является «последним членом» развития проявления, но что она, в сущности, располагается вне и за пределами этого развития, потому что она принадлежит другому порядку реальности, трансцендентному по отношению к проявлению и «становлению»; различие проявленного порядка и порядка принципов соответствует по аналогии различию, которое мы установили между областью переменных величин и областью величин постоянных. Кроме того, поскольку речь идёт о постоянных величинах, то очевидно, что никакое изменение не может быть сюда введено посредством какой-либо операции, и что, как следствие, «переход к пределу» имеет следствием не произвести что-то в этой области, но только дать нам об этом знание; кроме того, порядок принципов неизменен, и, чтобы до него дойти, речь не идёт о том, чтобы «осуществить» что-то, что ещё не существовало, но осознать на самом деле то, что есть, постоянным и абсолютным образом. Мы, естественно, должны были, учитывая тему этого исследования, рассматривать более частным образом и прежде всего то, что, собственно говоря, соотносится с количественной областью, в которой идея развития возможностей передается, как мы видели, понятием изменения либо в направлении неопределённо возрастающего, либо в направлении неопределённо уменьшающегося; но эти несколько указаний доказывают, что все вещи способны приобретать благодаря соответствующему преобразованию по аналогии несравнимо более важное значение, чем то, что они, казалось бы, имели сами по себе, поскольку в силу такого переноса интегрирование и другие

[137] Об аналогичном применении понятия интегрирования см.: «Символизм креста», главы XVIII и XX.

операции того же рода на самом деле оказываются чем-то вроде символа самой метафизической «реализации».

Очевидна тем самым распространенность различия, которое существует между традиционной наукой, допускающей такие доводы, и профанной наукой наших современников; и по этому поводу мы добавим ещё одно замечание, которое непосредственно связано с различием аналитического познания и познания синтетического. Профанная наука на самом деле является, по существу, исключительно аналитической: она никогда не рассматривает принципы и она теряется в деталях феноменов, неопределённое и до неопределённости изменчивое множество которых для неё на самом деле неисчерпаемо, и поэтому она никогда не может дойти, как познание, до какого-либо реального и окончательного результата; она опирается только на сами феномены, то есть на внешние явления, и она неспособна достичь основы вещей, за что уже Лейбниц упрекал картезианский механицизм. В этом, между прочим, одна из причин, которыми объясняется современный «агностицизм», так как, поскольку имеются вещи, которые могут быть познаны лишь синтетически, тому, кто использует один лишь анализ, приходится тем самым объявлять их «непознаваемыми», потому что они на самом деле для него являются таковыми, так же, как тот, кто опирается на аналитическое видение неопределённости, может верить, что эта неопределённость абсолютно неисчерпаема, тогда как в реальности она является таковой лишь аналитически. Верно, что синтетическое познание, в сущности, является тем, что можно назвать «всеобъемлющим» познанием, каким является познание непрерывной совокупности или неопределённого ряда, элементы которого не даны и не могут быть даны раздельно; но помимо того, что именно в этом и заключается все самое важное, можно всегда, поскольку все содержится в принципе, вновь спуститься отсюда к рассмотрению каких угодно частных вещей, так же как, если, например, неопределённый ряд дается синтетически благодаря знанию закона его образова-

ния, всегда можно, когда это необходимо, вычислить, в частности, любой из его членов, тогда как, исходя, наоборот, из тех же самых частных вещей, рассматриваемых сами по себе и в их неопределённых деталях, никогда нельзя возвыситься до принципов; и именно в этом, как мы уже говорили в начале, точка зрения и подход традиционной науки является в некотором роде обратным подходу профанной науки, подобно тому как сам синтез является обратным анализу. Это, между прочим, применение той очевидной истины, что если и можно получить «минус» из «плюса», то, наоборот, никогда нельзя вывести «плюс» из «минуса»; тем не менее именно это и стремится сделать современная наука, со всеми её механистическими и материалистическими концепциями и её исключительно количественной точкой зрения; но как раз потому, что это невозможно, она в реальности и неспособна дать истинное объяснение чему бы то ни было[138].

[138] Что касается этого последнего пункта, то можно ещё раз обратиться к рассуждениям, которые мы изложили в книге «Царство количества и знамения времени».

Глава XXIII. Аргументы Зенона элейского

Предшествующие рассуждения имплицитно содержат в себе решение всех трудностей наподобие тех, которые Зенон Элейский посредством своих знаменитых аргументов противопоставлял возможности движения, по меньшей мере по видимости, и если судить о них по той форме, в какой обычно эти аргументы представляются, так как можно сомневаться, что их истинное значение было именно таковым. Маловероятно на самом деле, что Зенон действительно имел намерение отрицать движение; кажется более вероятным, что он желал доказать только его несовместимость с предположением, допускаемым, в частности, атомистами, о реальном и неустранимом многообразии, существующем в природе вещей. Поэтому именно против самого этого многообразия, таким образом понимаемого, эти аргументы с самого начала и должны были быть направлены на самом деле; мы не говорим, что против всякого многообразия, так как само собой разумеется, что многообразие существует на своем уровне, так же, как и движение, которое, между прочим, как и всякое изменение какого-либо рода его неизбежно предполагает; но так же, как и самого движения, в силу его характера переходного и мимолетного видоизменения, было бы недостаточно, и оно было бы лишь чистой иллюзией, если бы не соединялось с высшим принципом, трансцендентным по отношению к нему, таким, как «неподвижный двигатель» Аристотеля, так и многообразие было бы на самом деле несуществующим, если бы оно сводилось к себе самому и если бы оно не происходило от единства, и поэтому мы имеем его математический образ, как мы видели, в образовании ряда чисел. Кроме того, предположение о неустранимом многообразии неизбежно исключает любую ре-

альную связь между элементами вещей и, как следствие, любую непрерывность, так как непрерывность представляет собой лишь частный случай или особую форму такой связи; как раз атомизм, как мы об этом уже ранее сказали, неизбежно и подразумевает дискретность всех вещей; и именно с этой дискретностью в конечном счёте движение реально несовместимо, и мы увидим, что именно это на самом деле аргументы Зенона и доказывают.

Приведём, например, следующий довод: движущееся тело никогда не сможет перейти от одного положения к другому, потому что между двумя положениями, насколько бы сближенными они ни были, всегда существует, скажем, бесконечное число других, которые необходимо последовательно пройти в ходе движения, и такая бесконечность никогда не сможет быть исчерпанной. Разумеется, речь здесь не может идти о бесконечности так, как о ней говорится, что не имеет на самом деле никакого смысла; но тем не менее верно, что необходимо рассматривать в каждом интервале истинную неопределённость положений движущегося тела, неопределённость, которая на самом деле не может быть исчерпана таким аналитическим, состоящим в том, чтобы занимать эти положения отдельно друг за другом, как берутся друг за другом члены дискретного ряда. Однако именно сама эта концепция движения и является ошибочной, так как она в итоге означает рассмотрение непрерывного как состоящего из точек, так же, как и концепция тел как состоящих из атомов; и это означает, что в реальности нет непрерывного, так как идёт ли речь об атомах или о точках, эти последние элементы могут быть лишь дискретными; между прочим, верно, что без непрерывности не существует и возможного движения, и как раз всё это этот аргумент на самом деле и доказывает. Так же обстоит дело и с аргументом стрелы, которая летит и которая тем не менее остается неподвижной, потому что в каждое мгновение мы видим её лишь в одном-единственном положении, что сводится к предположению, что каждое положение само по себе мо-

жет рассматриваться как устойчивое и определённое и что поэтому последовательные положения образуют что-то вроде дискретного ряда. Необходимо, между прочим, заметить, что на самом деле не верно, что движущееся тело мы всегда видим так, как если бы оно занимает одно неизменное положение, даже наоборот, когда движение является довольно быстрым, нам не приходится отчётливо видеть само движущееся тело, но только что-то вроде следа его непрерывного перемещения: так, например, если быстро вращать горящую головню, то мы видим уже не форму этой головни, но только круг огня; то, что этот факт объясняется сопротивлением ретинальных, связанных с сетчаткой глаза, впечатлений, как это делают психологи, или каким угодно иным способом, это не имеет значения, так как тем не менее очевидно, что в подобных случаях в каком-то отношении непосредственно и осязаемым образом улавливается сама непрерывность движения. Кроме того, когда, сформулировав такой аргумент, говорят «в каждое мгновение», то предполагают тем самым, что время образовано рядом неделимых моментов, каждому из которых соответствует определённое положение движущегося тела; но в реальности временная непрерывность так же не состоит из мгновений, как и пространственная непрерывность не состоит из точек, и, как мы уже указывали, необходимо объединение или, скорее, сочетание этих двух непрерывностей, чтобы учитывать возможность движения.

Говорят также, что чтобы пройти некоторое расстояние, необходимо сначала пройти половину этого расстояния, затем половину другой половины, затем половину того, что осталось, и так далее, до неопределённости, таким образом, что мы всегда оказываемся перед неопределённостью[139], которая, таким образом рассматриваемая, будет на самом деле неисчерпаемой. Другим почти эквивалентным аргу-

[139] Это соответствует последовательным членам неопределённого ряда 1/1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 2, приводимого в качестве примера Лейбницем в отрывке, который мы выше уже цитировали.

ментом является следующий: если предположить два движущихся тела, разделенных некоторым расстоянием, то одно из них, хотя и движущееся быстрее, чем другое, никогда не сможет с ним соединиться, так как, когда оно прибудет в ту точку, где находилось второе тело, то это второе тело будет уже в другом положении, отделенном от первого расстоянием, меньшим, чем начальное расстояние; когда оно прибудет в это второе положение, другое будет уже в третьем, отделенном от второго ещё меньшим расстоянием, и так далее до неопределённости, так что расстояние между этими двумя движущимися телами, пусть и всегда уменьшающееся, никогда не станет нулевым. Существенный недостаток этих аргументов, так же, как и предыдущего, заключается в том, что они предполагают, что чтобы достичь некоторого члена, все промежуточные степени должны быть пройдены по отдельности и последовательно. Итак, из двух приходится выбирать одно: или рассматриваемое движение действительно является непрерывным, и тогда оно не может быть расчленено таким образом, поскольку непрерывное не имеет последних элементов; или оно составляется, или по крайней мере может рассматриваться состоящим из дискретной последовательности интервалов, каждый из которых имеет определённую величину, как шаг идущего человека[140], и тогда рассмотрение этих интервалов очевидно устраняет все возможные промежуточные положения, которые не следует в действительности проходить в качестве отдельных этапов. Кроме того, в первом случае, который, собственно говоря, и является случаем непрерывного изменения, член такого изменения, предполагаемый по определению неизменным, не может быть достигнут в са-

[140] В реальности движение, из которого состоит ходьба, является таким же непрерывным, как и любое другое движение, но точки, где человек касается почвы, образуют дискретную последовательность таким образом, что каждый шаг отмечает определенный интервал, и поэтому пройденное расстояние может быть разложено на такие интервалы, где к почве прикасаются в каждой промежуточной точке.

мом изменении, и тот факт, что на самом деле его достигают, требует введения качественной разнородности, которая на этот раз образует истинную дискретность и которая передается здесь переходом от состояния движения к состоянию покоя; это возвращает нас к вопросу о «переходе к пределу», истинное понятие которого мы ещё должны окончательно уточнить.

Глава XXIV. Истинная концепция перехода к пределу

Рассмотрение «перехода к пределу» необходимо, как говорили мы выше, если не при практических применениях метода бесконечно малых, то по крайней мере при его теоретическом обосновании, и такое обоснование как раз и есть то единственное, что для нас здесь важно, так как простые практические правила вычисления, имеющие в каком-то роде «эмпирический» успех по не очень понятным причинам, не представляют, очевидно, никакого интереса с нашей точки зрения. Несомненно, чтобы осуществлять вычисления и чтобы даже доводить их до конца, нет нужды задаваться вопросом: достигает ли переменная предела и как она его может достичь; однако если она его не достигает, то эти вычисления всегда могут иметь лишь значение простых приблизительных расчетов. Верно, что речь здесь идёт о неопределённом приближении, поскольку сама природа бесконечно малых величин позволяет получать сколь угодно малую ошибку, которую всё же невозможно полностью устранить, поскольку эти самые бесконечно малые величины при их неопределённом уменьшении никогда не становятся нулевыми. Возможно, скажут, что здесь перед нами практический эквивалент совершенно строгих вычислений; но помимо того, что речь у нас идёт не об этом, может ли само такое неопределённое приближение сохранить смысл, если в результатах, к которым следует прийти, необходимо рассматривать уже не переменные, но одни только постоянные и определённые величины? При таких условиях нельзя, с точки зрения результатов, избавиться от такой альтернативы: или предел не достигается, и тогда вычисление бесконечно малых является лишь менее грубым из методов при-

ближения; или предел достигается, и тогда мы имеем дело с методом, который действительно является строгим. Но мы видели, что предел в силу самого своего определения никогда точно не может быть достигнут переменной; какое тогда право имеем мы говорить, что он тем не менее может быть достигнут? Он может быть достигнут, но не в ходе вычислений, а в результатах, потому что в них должны фигурировать лишь постоянные и определённые величины, такие как сам предел, а не переменные; следовательно, именно различие переменных величин и величин постоянных, различие, впрочем, чисто качественное, и является, как мы уже говорили, единственным истинным обоснованием строгости вычисления бесконечно малых.

Таким образом, ещё раз повторим, предел не может быть достигнут в изменении и в качестве его завершения; он не является последним из значений, которое должна принять переменная, и концепция непрерывного изменения, доходящего до «последнего значения» или до «последнего состояния», была бы такой же непостижимой и противоречивой, как и концепция неопределённого ряда, завершающегося «последним членом», или как концепция деления непрерывной совокупности, доходящего до «последних элементов». Предел не принадлежит, следовательно, к ряду последовательных значений переменной; он находится вне этого ряда, и именно поэтому мы говорим, что «переход к пределу» подразумевает, в сущности, дискретность. Если бы было иначе, перед нами была бы неопределённость, которая могла бы быть исчерпана аналитически, и именно это и не может иметь места; но как раз здесь различие, которое мы в этой связи установили, приобретает все своё значение, так как мы оказываемся перед одним из тех случаев, где речь идёт о достижении, согласно выражению, которое мы уже использовали, пределов некоторой неопределённости; следовательно, не без оснований одно и то же слово «предел» вновь обнаруживается вместе с другим более специальным значением в том частном случае, который мы теперь рас-

сматриваем. Предел переменной должен действительно ограничивать в общем смысле этого слова, неопределённость состояний или возможных видоизменений, которые включает в себя определение этой переменной; и именно для этого необходимо, чтобы он обнаруживался вне того, что он должен таким образом ограничивать. Не может быть и речи об исчерпании этой неопределённости в ходе самого того изменения, которое его образует; о чём на самом деле идёт речь, так это о том, чтобы выйти за пределы области такого изменения, в которую предел не оказывается включенным, и именно такой результат и достигается, не аналитически и постепенно, но синтетически и сразу, «внезапным» в некотором роде способом, посредством которого выражается дискретность, которая тогда возникает, при переходе от переменных величин к величинам постоянным[141].

Предел принадлежит исключительно к области постоянных величин: именно поэтому «переход к пределу» логически требует одновременного рассмотрения в величине двух различных модальностей, в каком-то отношении накладывающихся друг на друга; он есть не что иное, как переход к высшей модальности, в которой полностью реализуется то, что в низшей модальности существует лишь в состоянии простой тенденции, и именно в этом и состоит, если использовать аристотелевскую терминологию, истинный переход от потенции к акту, от возможности к действительности, что, разумеется, не имеет ничего общего с простой «компенсацией ошибок», которую усматривает Карно. Математическое понятие предела подразумевает, в силу самого своего определения, признак стабильности и равновесия, признак чего-то постоянного и определённого, который, очевидно, не может быть осуществлен величинами, поскольку их рас-

[141] Можно было бы в связи с этим «внезапным» или «мгновенным» характером напомнить здесь, под видом сравнения с порядком естественных феноменов, пример с разрывом веревки, который мы приводили выше: этот разрыв также является пределом напряжения, но он ни в коей мере не подобен напряжению какой бы то ни было степени.

сматривают в низшей модальности как переменные по своей сущности; он, следовательно, никогда не может быть достигнут постепенно, но он достигается непосредственно, посредством перехода от одной модальности к другой, перехода, который один только позволяет устранить все промежуточные стадии, потому что он включает в себя и синтетически охватывает всю их неопределённость, и благодаря которому то, что было и могло быть лишь тенденцией в переменных, подтверждается и устанавливается в реальном и определённом результате. Иначе «переход к пределу» был бы всегда просто нелогичным, так как очевидно, что поскольку мы остаемся в области переменных, то нельзя достичь того постоянства, которое свойственно пределу, где величины, которые ранее рассматривались как переменные, как раз и утрачивают этот переходный и случайный характер. Состояние переменных величин является на самом деле в высшей степени переходным и в каком-то роде несовершенным состоянием, поскольку оно представляет собой лишь выражение «становления», идею которого мы также обнаруживаем и в основе понятия самой неопределённости, которое, между прочим, тесно связано с этим состоянием изменения. Кроме того, вычисления могут совершенными, в смысле действительно завершенными, лишь когда они доходят до результатов, в которые они уже не вводят ничего ни переменного, ни неопределённого, но только постоянные и определённые величины; и мы уже видели, насколько это может применяться посредством преобразования по аналогии даже за пределами количественного порядка, который тогда имеет лишь значение символа даже в том, что непосредственно относится к метафизической «реализации» существа.

Глава XXV. Заключение

Нет нужды настаивать на важности, которую изложенные нами в ходе этого исследования доводы представляют с собственно математической точки зрения, в том, что они приносят решение всех трудностей, возникающих в связи с методом бесконечно малых либо в том, что касается его истинного значения, либо в том, что касается его строгости. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы такое решение могло быть дано, — это не что иное, как строгое применение истинных принципов. Но именно об этих принципах современные математики, так же как и другие профанные ученые, совершенно ничего не знают, и такое невежество является, по сути дела, единственной причиной множества дискуссий, которые при таких условиях могут продолжаться бесконечно, никогда не завершаясь никаким серьёзным выводом и только, наоборот, ещё больше запутывая вопрос и увеличивая путаницу, как слишком хорошо показывает это спор «финитистов» и «инфинитистов»; было бы тем не менее весьма легко всё это в корне пресечь, если бы сумели прежде всего ясно установить истинное понятие метафизической бесконечности и фундаментальное различие бесконечного и неопределённого. Сам Лейбниц, если у него и была заслуга смело затрагивать некоторые вопросы, чего не делали даже те, кто появился после него, часто высказывал по этому поводу лишь нечто едва ли метафизическое, а иногда даже и почти явно антиметафизическое, как и обычные рассуждения общего характера современных философов; это, следовательно, тот же самый недостаток принципов, который мешал ему ответить своим оппонентам удовлетворительным и в некотором роде окончательным способом, и который тем самым открыл дверь всем более позд-

ним дискуссиям. Разумеется, можно вместе с Карно сказать, что «если Лейбниц ошибался, то только формулируя сомнения относительно точности своего анализа, если только он реально имел такие сомнения»[142]; но даже если он их, по сути дела, и не имел, он в любом случае не мог строго доказать такую точность, потому что его концепция непрерывности, которая, конечно же, не является ни метафизической, ни даже логической, мешала ему сделать необходимые в этом отношении различия и, как следствие, сформулировать точное понятие предела, которое, как мы показали, имеет главное значение для обоснования метода бесконечно малых.

Благодаря всему этому очевидно, какой интерес может представлять рассмотрение принципов даже для самой специальной науки, здесь рассматриваемой, и не намереваясь заходить, опираясь на эту науку, дальше той относительной и случайной области, к которой она применима непосредственно; именно этого, разумеется, совершенно не понимают наши современники, которые охотно хвалятся тем, что посредством своей профанной концепции науки сделали её независимой от метафизики, даже от теологии[143], тогда как истина в том, что они тем самым лишь лишили её всякой реальной ценности познания. Более того, если бы была понята необходимость соединить науку с принципами, тогда, разумеется, не было бы никакой причины её придерживаться, и мы вполне естественно вернулись бы к традиционной концепции, согласно которой частная наука, какой бы она ни была, имеет значение не сама по себе, а благодаря возможности использовать её как «опору» для восхождения

---

[142] Карно Л. «Рассуждения о метафизике бесконечно малых», стр. 33.

[143] Нам вспоминается, как один современный «сциентист» возмущался, что, например, в Средние века, могли находить возможность говорить о Троице в связи с геометрией треугольника; впрочем, он, вероятно, и не подозревал, что и сегодня так же обстоит дело в символизме Компаньонажа.

к познанию высшего порядка[144]. Мы как раз и желали здесь посредством характерного примера дать представление о том, что можно было бы сделать, по крайней мере в некоторых случаях, чтобы вернуть науке, изуродованной и искажённой профанными концепциями, её ценность и её реальное значение, одновременно и с точки зрения того относительного знания, которое она непосредственно предоставляет, и с точки зрения высшего знания, к которому она способна привести благодаря преобразованию по аналогии; мы сумели, в частности, увидеть, что можно извлечь в этом последнем отношении из таких понятии, как интегрирование и «переход к пределу». Необходимо, впрочем, сказать, что математика больше, чем любая другая наука, предоставляет символизм, особенно пригодный для выражения метафизических истин в той мере, в какой они выразимы, как в этом могли убедиться тем, кто прочел некоторые из наших предыдущих трудов; именно поэтому этот математический символизм используется столь часто либо вообще с традиционной точки зрения, либо с инициатической точки зрения, в частности[145]. Однако подразумевается, что для того чтобы он был таковым, необходимо, чтобы эти науки были освобождены от ошибок и разнообразной путаницы, которая внедрена в них ложными воззрениями современников, и мы были бы счастливы, если настоящий труд мог бы по крайней мере некоторым образом способствовать такому результату.

---

[144] См., например, по этому поводу об эзотерическом и инициатическом аспекте «свободных искусств» в Средние века, «Эзотеризм Данте».

[145] Относительно причин такой совершенно особой ценности, которую в этом отношении имеет математический символизм как числовой, так и геометрический, можно обратиться к пояснениям, которые мы давали в «Царство количества и знамения времени».